CÁLCULO INTEGRAL

ARISTÓFANES MADRIGAL UC

Presentación

La diferencia la marca uno mismo. El compromiso y la dedicación son dos cualidades que te permitirán desarrollar tu talento. Nada se logra sin dedicación. Y pocas cosas se alcanzan sin compromiso.

Por esas razones, estos libros de trabajo te permitirán avanzar y lograr consolidar tus conocimientos.

Dedícate tiempo de forma inteligente. Invierte en tus habilidades. Haz tus horarios, organiza tus metas y ten un compromiso verdadero con tu educación. Recuerda, lo que construyes hoy es tu futuro.

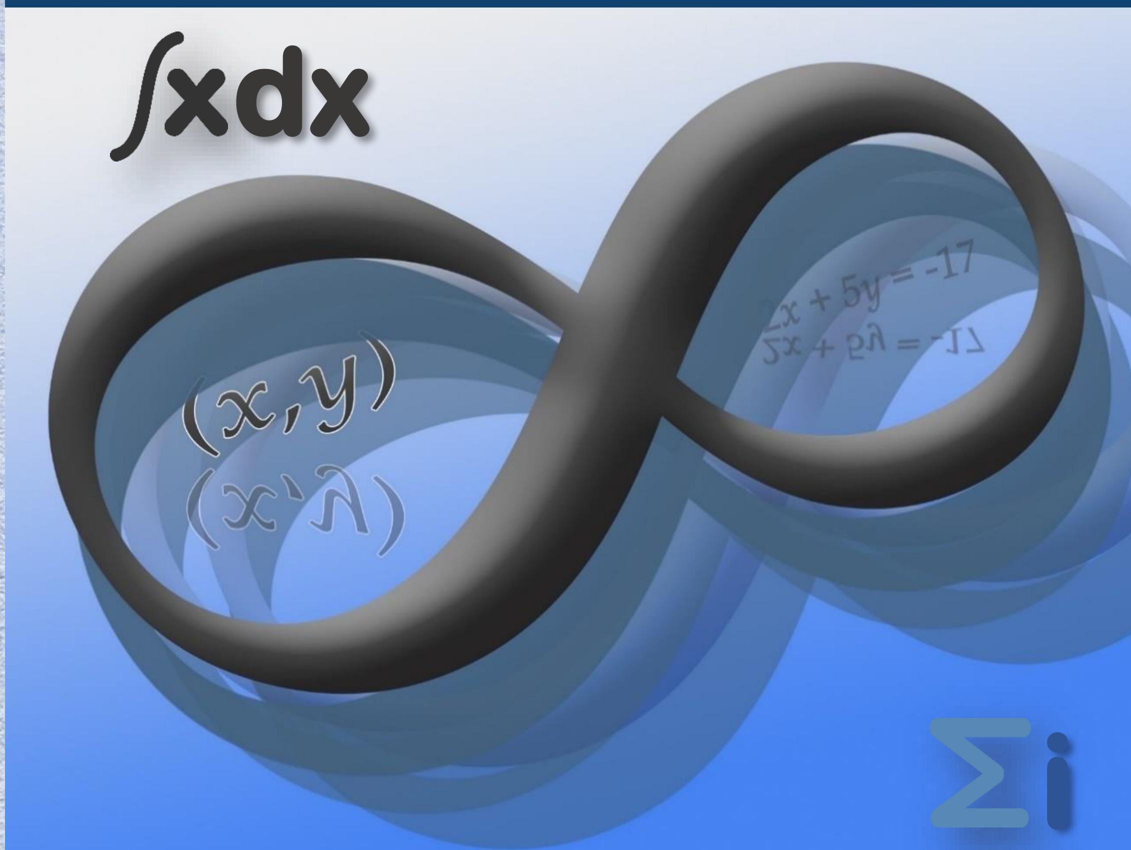
Te deseo mucho éxito.

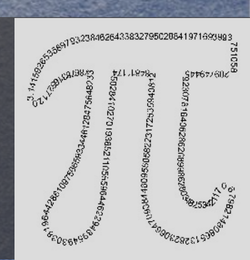
Arq. Nery Celia Rojo Aguilar

Directora General

CECyTEC

CALCULO INTEGRAL





PRESENTACIÓN

Cada día se genera más conocimiento en el mundo, pero por desgracia no es accesible para muchos, por lo que es necesario buscar nuevas formas para que todos lo tengan al alcance.

Bajo esta premisa se ha concebido este material, en donde se busca que tengas acceso de una manera fácil al conocimiento y te permita el logro de tus aprendizajes, para ser usados en la escuela y en la vida.

Por tal motivo, esta propuesta fusiona el material educativo por excelencia: “el libro” fusionado con los recursos multimedia que las nuevas tecnologías ofrecen, naciendo así el HIPERLIBRO.

Este concepto está pensado en tí, por lo que se presenta en formato de libro, pero de una forma dinámica, es decir, te permite acceso a otros recursos que estarán al alcance en tan solo un clic: como videos explicativos, audios, imágenes, simuladores, calculadoras entre otros, ofreciéndote la oportunidad de usar la red para seguir aprendiendo.

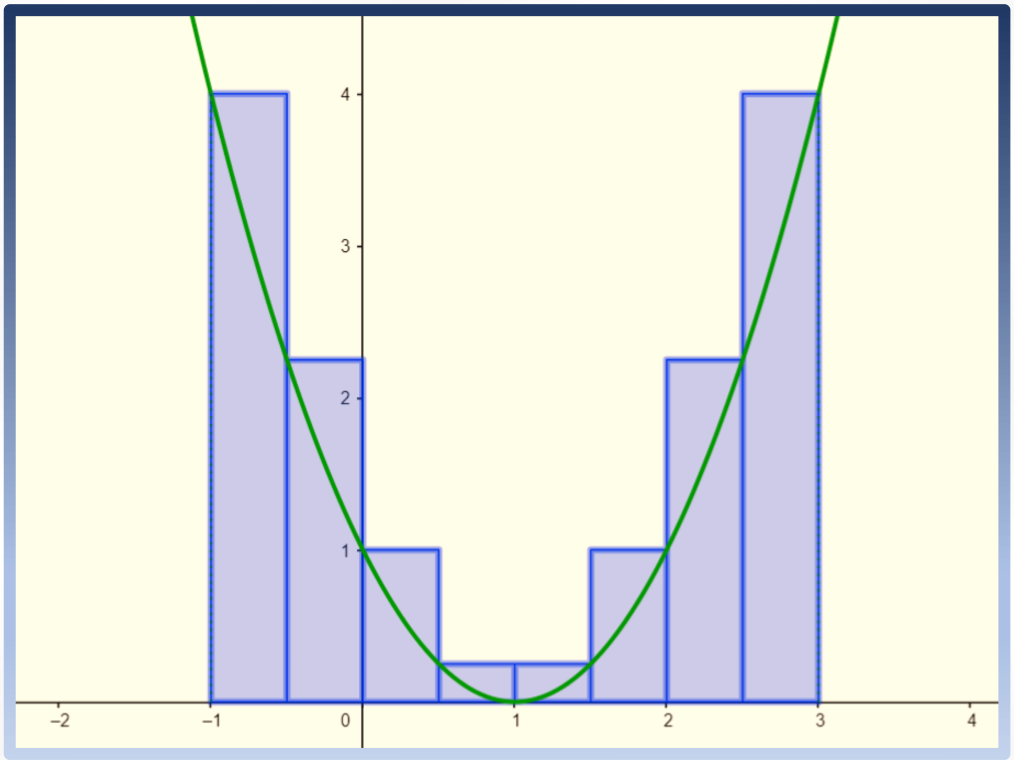
Te invito a que lo explores y que decidas el ritmo de tu aprendizaje, pero sobre todo que te sirva para adquirir más saberes, con la finalidad de que seas un mejor alumno y una mejor persona para el bien de tu escuela, el de tus familiares y tu comunidad.

Éxito.

Aristófanes Madrigal Uc

Contenido

I. APROXIMAS ÁREAS BAJO LA CURVA

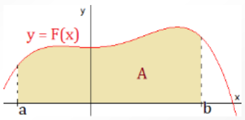


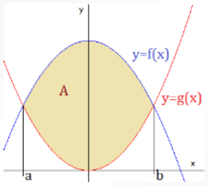
APRENDIZAJES ESPERADOS

- Aproxima el área bajo la curva mediante rectángulos inscritos, se mide o calcula el área de estos y se estima el valor del área bajo la curva.
- Compara los resultados de diversas técnicas de aproximación.
- Acota el valor del área bajo la curva, aproximando por exceso y por defecto. Usa ambos métodos de aproximación: rectángulos y trapecios.

INTRODUCCIÓN

El cálculo fue creado sobre todo para tratar los principales problemas científicos del siglo XVII. Problemas relativos a velocidad dada la fórmula de la distancia que un cuerpo recorre como función del tiempo, obtener la velocidad y la aceleración en cualquier instante; y, al revés, dada la fórmula que describe la aceleración de un cuerpo como función del tiempo, obtener la velocidad y la distancia recorrida. Este problema surgió directamente en el estudio del movimiento, y la dificultad que planteaba era que las velocidades y las aceleraciones que interesaban en el siglo XVII variaban de instante en instante. Al calcular una velocidad instantánea, por ejemplo, no se puede dividir la distancia recorrida por el tiempo empleado, como ocurre en el caso del cálculo de la velocidad media, porque en un instante dado tanto la distancia recorrida como el tiempo empleado son cero, y $\frac{0}{0}$ no tiene sentido. Sin embargo, era claro desde un punto de vista físico que los objetos móviles tienen una velocidad en cada instante de su viaje. Pero la problemática principal que llevo al desarrollo del cálculo es determinar el área y volumen de cualquier figura.

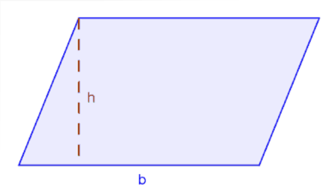




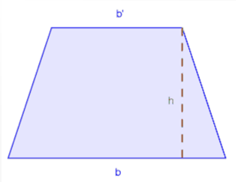
Valorando lo que sabes

1. Determina las áreas de las siguientes figuras

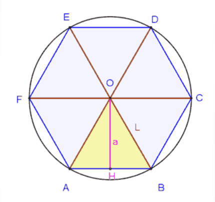
a) base = 10cm   altura=7cm



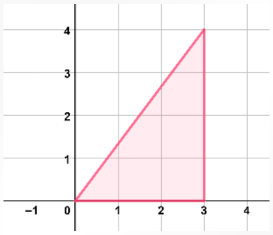
b) Base mayor=12cm   base menor=7   altura=5



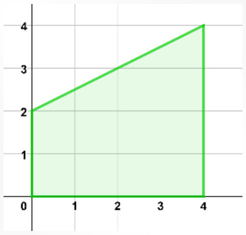
c) lado=6cm   apotema=$3\sqrt{3}$



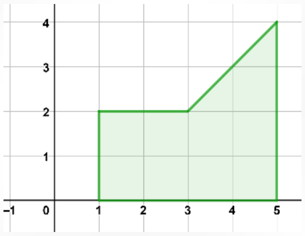
d)



e)



f)



2. Determina la superficie de la figura que se forma con las siguientes coordenadas

a) A (1,0) B (5,0) C (5,2) y D (1, 4)

b) A (3,0) B (1,3) C (3,6) y D (5, 3)

c) A (1,0) B (1,3) C (4,6) D (7, 3) y E (7, 0)

Área bajo la curva

Calcular el área de figuras geométricas es una actividad que se ha estudiado desde la primaria, seguramente has tenido que calcular la superficie de triángulos, cuadrados, círculos, trapecios entre otros, esto se realiza de manera directa si hacemos uso de las fórmulas de áreas que existen para cada figura geométrica.
El área bajo la curva lo podemos definir en un primer momento como el área comprendida entre una función y el eje X para un intervalo determinado.

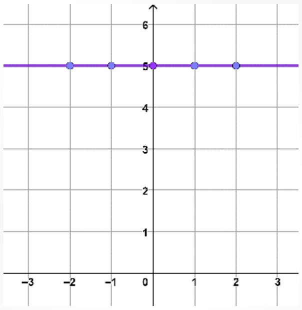
Calcula el área entre la curva de las siguientes funciones y el eje X para los intervalos dados.

a) $f(x) = 5$ para el intervalo de $[-2,\ 2]$

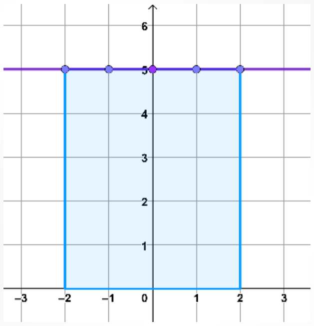
Primero: tabulamos los valores enteros del intervalo en la función

x	$f(x) = 5$
-2	$f(-2) = 5$
-1	$f(-2) = 5$
0	$f(-2) = 5$
1	$f(-2) = 5$
2	$f(-2) = 5$

Segundo: se traza la gráfica de acuerdo con los valores obtenidos



Tercero: se limita la gráfica de acuerdo con el intervalo dado



Cuarto: se obtiene el área usando la fórmula de la figura correspondiente

En este caso la fórmula a usar es la del rectángulo tomando como extremos las coordenadas dadas por el intervalo (-2,5) y (2, 5)

Área de un rectángulo= base x altura

$$base = |x_2 - x_1| \qquad altura = |y_1|$$

$$base = |2 - (-2)| \qquad altura = |5|$$

$$base = |2 + 2| \qquad altura = 5$$

$$base = 4$$

$$Área = (4)(5)$$

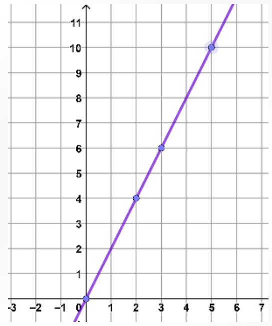
$$Área = 20$$

b) $f(x) = 2x$ para el intervalo de $[0,\ 5]$

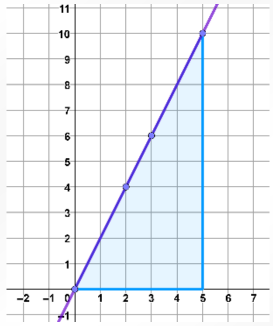
Primero: tabulamos para algunos valores enteros del intervalo en la función

x	$f(x) = 2x$
0	$f(0) = 2(0) = 0$
2	$f(2) = 2(2) = 4$
3	$f(3) = 2(3) = 6$
5	$f(5) = 2(5) = 10$

Segundo: se traza la gráfica de acuerdo con los valores obtenidos



Tercero: se limita la gráfica de acuerdo con el intervalo dado



Cuarto: se obtiene el área usando la fórmula de la figura correspondiente

En este caso la fórmula a usar es la del triángulo tomando como extremos las coordenadas dadas por el intervalo (0,0) y (5, 10)

Área de un triángulo= (base x altura)/2

$$base = |x_2 - x_1| \qquad altura = |f(x_2) - f(x_{1)}|$$

$$base = |5 - 0| \qquad altura = |10 - 0|$$

$$base = |5| \qquad altura = |10|$$

$$base = 5 \qquad altura = 10$$

$$Área = \frac{(5)(10)}{2}$$

$$Área = \frac{50}{2}$$

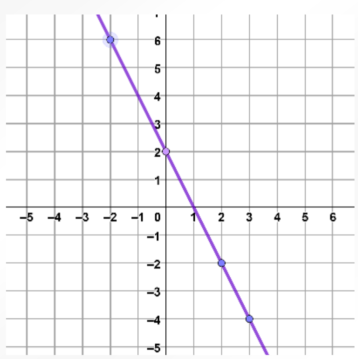
$$Área = 25$$

c) $f(x) = 2 - 2x$ para el intervalo de $[-2, 3]$

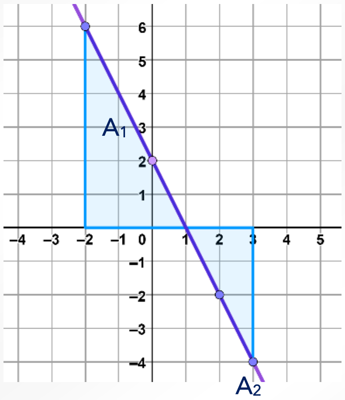
Primero: tabulamos para algunos valores enteros del intervalo en la función

x	$f(x) = 2 - 2x$
-2	$f(-2) = 2 - 2(-2) = 6$
0	$f(2) = 2 - 2(0) = 2$
2	$f(2) = 2 - 2(2) = -2$
3	$f(3) = 2 - 2(3) = -4$

Segundo: se traza la gráfica de acuerdo con los valores obtenidos



Tercero: se limita la gráfica de acuerdo con el intervalo dado



Cuarto: se obtiene el área usando la fórmula correspondiente

En este caso se deben encontrar las dos áreas del triángulo: A_1 y A_2 para el triángulo1 el intervalo es de $[-2,1]$ y para el triángulo 2 el intervalo es $[1,3]$

Triangulo 1 (A_1)

$base = \|x_2 - x_1\|$	$altura = \|f(x_2) - f(x_{1)}\|$
$base = \|1-(-2)\|$	$altura = \|0-6\|$
$base = \|3\|$	$altura = \|-6\|$
$base = 3$	$altura = 6$

$$Área\ 1 = \frac{(3)(6)}{2}$$

$$Área\ 1 = \frac{18}{2}$$

$$Área\ 1 = 9$$

Triangulo 2 (A_2)

$base = \|x_2 - x_1\|$	$altura = \|f(x_2) - f(x_{1)}\|$
$base = \|3-1)\|$	$altura = \|-4-0\|$
$base = \|2\|$	$altura = \|-4\|$
$base = 2$	$altura = 4$

$$Área\ 2 = \frac{(2)(4)}{2}$$

$$Área\ 2 = \frac{8}{2}$$

$$Área\ 2 = 4$$

Área Total=9 + 4 =13

d) $f(x) = \begin{cases} x+3 & -2 \leq x < 1 \\ 4 & 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$

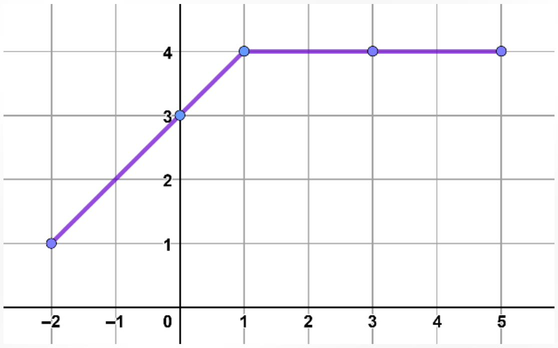
Primero: tabulamos para los valores enteros del intervalo en la función

En este caso se deben realizar dos tablas ya que se tienen dos funciones $f(x) = x + 3$ con el intervalo de $[-2, 1)$ y $f(x) = 4$ con el intervalo $[1, 5]$

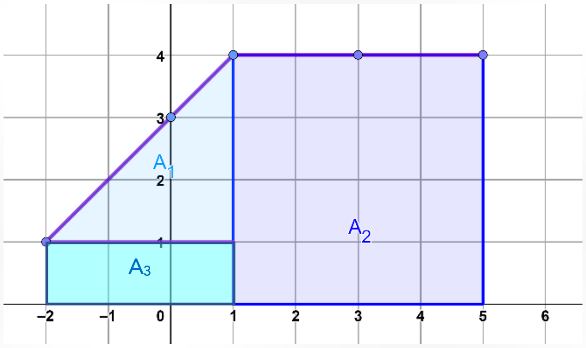
x	$f(x) = x + 3$
-2	$f(-2) = -2 + 3 = 1$
0	$f(0) = 0 + 3 = 3$
1	$f(1) = 1 + 3 = 4$

x	$f(x) = 4$
1	$f(1) = 4$
3	$f(3) = 4$
5	$f(5) = 4$

Segundo: se traza la gráfica de acuerdo con los valores obtenidos



Tercero: se limita la gráfica de acuerdo con el intervalo dado



Cuarto: se obtiene el área usando la fórmula correspondiente

En este caso se deben encontrar tres áreas, un triángulo A_1, un cuadrado A_2 y un rectángulo A_3 Para el triángulo el intervalo es de $[-2, 1]$ y para el cuadrado el intervalo es $[1, 5]$ y para el rectángulo $[-2, 1]$

Triangulo (A_1)

$base = |x_2 - x_1|$ $\qquad$ $altura = |f(x_2) - f(x_1)|$

$base = |1 - (-2)|$ $\qquad$ $altura = |4 - 1|$

$base = |3|$ $\quad$ $altura = |3|$

$base = 3$ $\quad$ $altura = 3$

$$Área\ 1 = \frac{(3)(3)}{2}$$

$$Área\ 1 = \frac{6}{2}$$

$$Área\ 1 = 4.5$$

cuadrado (A_2)

$base = |x_2 - x_1|$ $\quad$ $altura = |f(x_2)|$

$base = |5 - 1|$ $\quad$ $altura = |4|$

$base = |4|$ $\quad$ $altura = 4$

$base = 4$

$$Área\ 2 = (4)(4)$$

$$Área\ 2 = 16$$

$$Área\ 2 = 16$$

rectángulo (A_3)

$base = |x_2 - x_1|$ $\quad$ $altura = |f(x_2)|$

$base = |1 - (-2)|$ $\quad$ $altura = |1|$

$base = |3|$ $\quad$ $altura = 1$

$base = 3$

$$Área\ 3 = (3)(1)$$

$$Área\ 3 = 3$$

$$Área\ 3 = 3$$

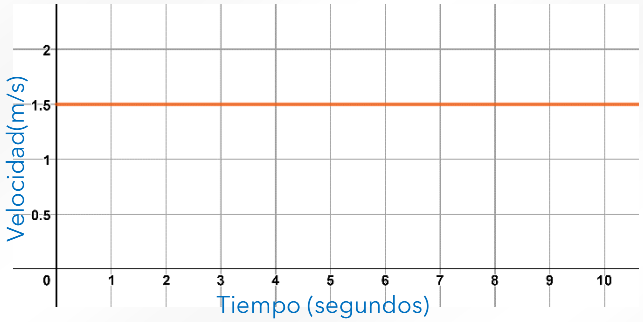
Área Total = 4.5 + 16 + 3 = 23.5

Interpretación geométrica del área bajo la curva

Las gráficas anteriores adquieren significado en diversas situaciones, específicamente cuando dos variables se relacionan para obtener un nuevo concepto. Tal es el caso de la velocidad vs tiempo o de la aceleración vs tiempo.

Por ejemplo es posible obtener una gráfica del movimiento de una persona durante una caminata, si se relaciona la velocidad con la que camina la persona durante un cierto tiempo, es posible trazar una gráfica relacionando estas dos variables. .

Si caminaras a una velocidad constante de 1.5 m/s durante un cierto tiempo; la gráfica *velocidad vs tiempo* será la siguiente



La gráfica obtenida es una **recta horizontal** ya que desde que empiezas a caminar llevas la misma velocidad, es decir, la velocidad es de 1.5 m/s en cualquier instante de tiempo. Si la pendiente de una recta está dada por la fórmula

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Que para este caso $\Delta y = cambio\ de\ velocidad$ y $\Delta x = cambio\ de\ tiempo$

Se tiene

$$m = \frac{cambio\ de\ la\ velocidad}{cambio\ de\ tiempo} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Recordemos que el cambio de la velocidad con respecto al tiempo es la aceleración así

$$m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a$$

Por lo que la pendiente de la recta será la aceleración

$$m = a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si tomamos dos puntos cualquiera, por ejemplo $A(\ 1, 1.5)$ y $B(\ 5, 1.5)$ la pendiente (aceleración) será:

$$a = \frac{1.5 - 1.5}{5 - 1}$$

$$a = \frac{0}{4} = 0\ \frac{m^2}{s}$$

Lo que era de esperarse, ya que para cualquier recta horizontal la pendiente es cero, interpretando este resultado decimos que no hay aceleración; como se ha visto en Física donde: *cualquier objeto que se mueve a velocidad constante en un tramo recto no tendrá aceleración.*

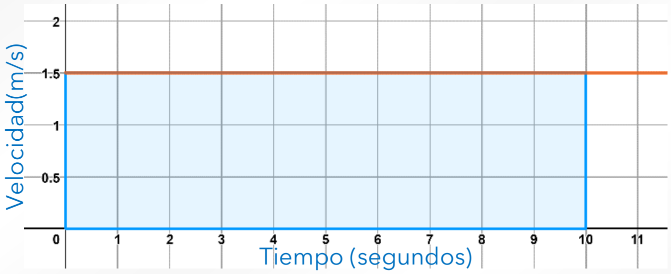
Ahora queremos conocer la distancia que se ha recorrido durante los primeros 10 segundos, lograrlo es muy sencillo, ya que como la velocidad es de 1.5 m/s, podemos usar la fórmula vista en física para Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU)

$$d = v \cdot t$$

$$d = (1.5)(10)$$

$$d = 15\ m$$

Pero también es posible conocer la distancia recorrida conociendo el área bajo la curva(recta) en el intervalo de 0 a 10 s



Como la superficie sombreada corresponde a un rectángulo con base 10s y altura 1.5m/s se tiene

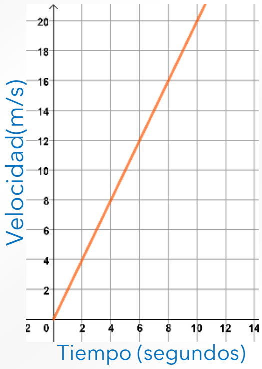
Área= base x altura

$$A = (10s)(1.5m/s)$$

$$A = 15m$$

Como vemos, es el mismo resultado que aplicando la fórmula de distancia, esto no es una casualidad, ya que siempre se cumple, así si en el eje vertical se tiene una razón de cambio, entonces el área bajo la curva será el resultado buscado.

Veamos otro ejemplo. Ahora se presenta la siguiente gráfica del movimiento velocidad vs tiempo de una persona



Determina a los primeros 8 segundos

a) la velocidad

b) la aceleración

c) la distancia recorrida

De la gráfica podemos obtener los valores solicitados en los tres incisos

a) Para obtener la velocidad solo basta tomar la ordenada del punto que corresponde a un tiempo de 8 segundos.

Por lo que se tiene que para $t = 8s \quad \rightarrow \quad v = 16m/s$

b) la aceleración es la pendiente de la curva (recta) por lo que al tomar dos puntos se puede calcular el valor de la aceleración

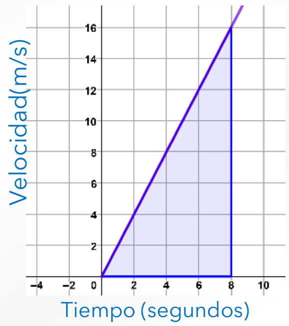
$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Tomando dos puntos cualquiera, $A(0,0)$ y $B(4,8)$

$$a = \frac{8-0}{4-0} = \frac{8\,m/s}{4\,s}$$

$$a = 2\,\frac{m}{s^2}$$ esta es la aceleración de la persona

c) Por último, se calcula la distancia recorrida, para ello se determinará el área bajo la curva para un tiempo de 8 segundos, como se hizo en el ejemplo anterior.



Se observa en la gráfica que el área corresponde a un triángulo por lo que usando la fórmula

$$A = \frac{base \times altura}{2}$$

$$A = \frac{(8s)(16m/s)}{2}$$

$$A = 64m$$ es la distancia que recorrió en 8 segundos

Manos a la obra

1. Calcula el área entre la curva de las siguientes funciones y el eje X para los intervalos dados.

a) $f(x) = -3$ para el intervalo de $[0,4]$

b) $f(x) = x - 2$ para el intervalo $[2,5]$

c) $f(x) = 3x + 1$ para el intervalo $[-2,3]$

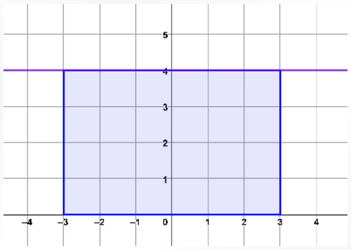
d) $f(x) = 2x - 3$ para el intervalo $[-3,2]$

e) $f(x) = \begin{cases} x & -2 \le x < 2 \\ 4 - x & 2 \le x \le 4 \end{cases}$

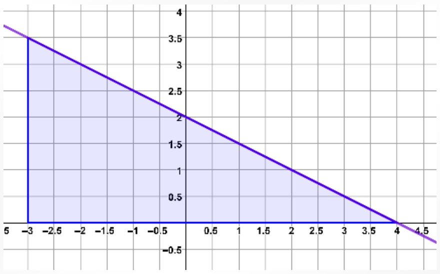
f) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & -3 \le x < 1 \\ 2 & 1 \le x \le 5 \end{cases}$

2. Calcula las áreas sombreadas

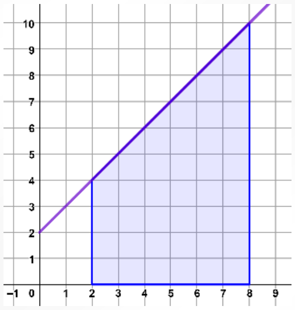
a)



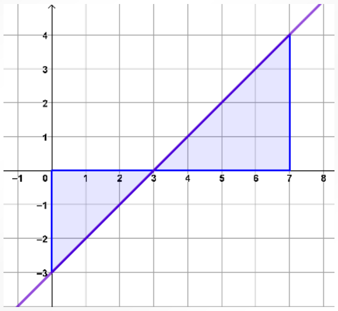
b)



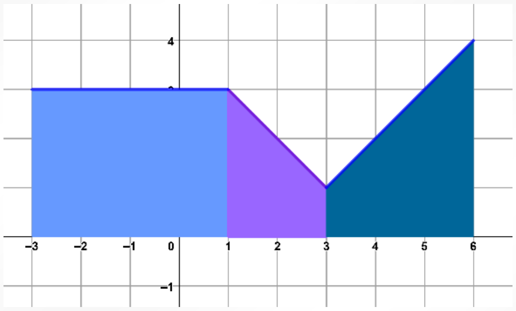
c)



d)



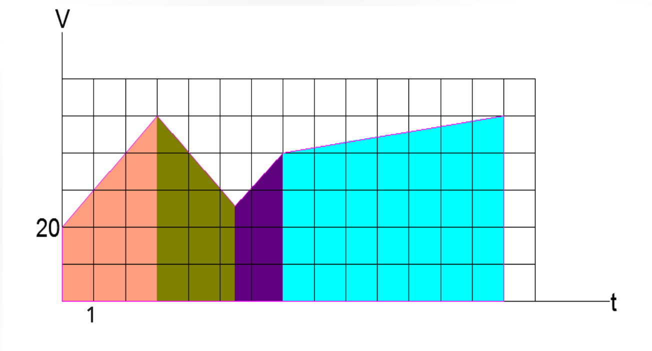
e)



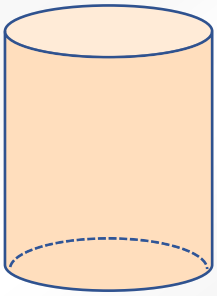
3. Un ciclista va a una velocidad de 10 m/s como se muestra en la gráfica. Determina para los primeros 15 segundos:

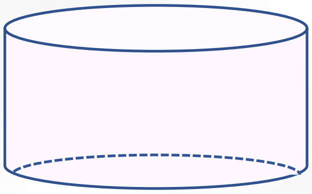
a) la velocidad
b) la aceleración
c) la distancia recorrida

4. En la siguiente grafica se muestra los cambios de velocidad de un automóvil en un trayecto de 14 horas. Describe que pasa con la velocidad del automóvil y calcula la distancia recorrida. La velocidad está en kilómetros por hora.



5. Considere recipientes de diferentes dimensiones y misma capacidad, que serán llenados a mismo flujo constante.


Recipiente A

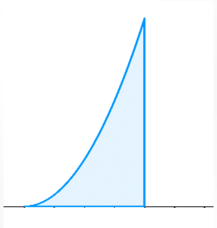

Recipiente B

a. ¿En qué se diferencia el crecimiento de la altura del cuerpo del líquido en el recipiente B respecto al A?, ¿Qué implicaciones tiene lo anterior en la gráfica de la altura respecto del tiempo de ambos recipientes? Argumente sus respuestas.

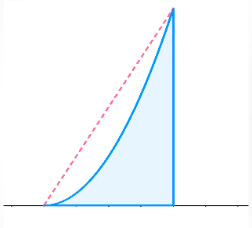
b. Proporcione la gráfica que muestre la altura del cuerpo del líquido al paso del tiempo en cada recipiente.
c. Proporcione la gráfica que muestre la razón de cambio de la altura del cuerpo del líquido al paso del tiempo en casa recipiente.

Aproximación de área bajo la curva

No todas las formas de las que se tiene que calcular un área tienen una forma conocida, por tal motivo se requieren de otras técnicas que permitan calcularlo. Por ejemplo, si se quiere determinar el área de una terreno donde un lado es curvo como se muestra en la figura, no se podrá aplicar alguna fórmula de área conocida. Aunque en este caso podemos decir que tiene forma triangular no lo es.



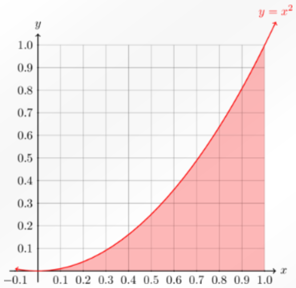
Aunque podemos hacer uso de algunas técnicas que permitan aproximar el área a alguna figura conocida y así obtener un valor cercano al valor real. De la figura anterior se puede aproximar su área por medio de un triángulo.



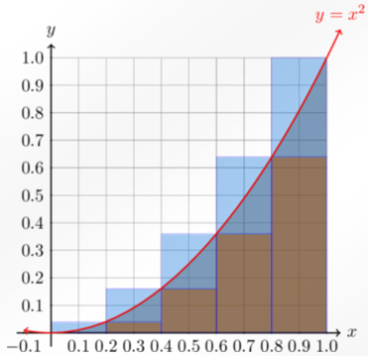
Esta podría ser una posible solución, pero como se observa en la figura el área que se obtenga no será muy aproximado al área real.

Aproximación por el método del rectángulo

Si queremos calcular el área que hay entre la parábola x^2, el eje Y y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$ tenemos que hacer uso de otras técnicas que permitirán encontrar el valor aproximado del área sombreada



Sin embargo, podemos aproximar el valor de esta área si vamos seccionando el intervalo (0,1) y dibujamos rectángulos con altura igual a la ordenada $y_i = {x_i}^2$. Para esto tenemos dos opciones, bien dibujamos los rectángulos de manera que una parte de este quede por encima de la parábola (rectángulos azules), o bien los dibujamos de manera que una parte quede por debajo de la parábola (rectángulos cafés).



La aproximación que hagamos tendrá, en el primer caso un **error por exceso**, es decir, será mayor al valor del área que buscamos. En el segundo caso el área aproximada será un poco menor al área debajo de la parábola por lo que se tendrá un error por defecto.
Podemos calcular el área de cada rectángulo que queda por encima de la parábola y de los que quedan por debajo y ordenar esta información en una tabla:
Para calcular el área de cada rectángulo necesitamos tener la longitud de la base y el de la altura.

Ya que el área a aproximar está limitado a un intervalo se llamará

a **al extremo izquierdo del intervalo o límite inferior y**

b **al extremo derecho del intervalo o límite superior**

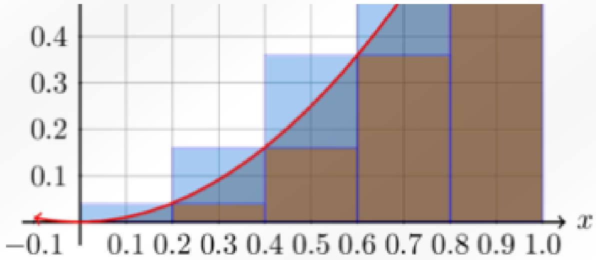
Para calcular la **longitud de la base** se divide el intervalo entre el número de rectángulos

$$Longitud\ de\ la\ base\ (\Delta x) = \frac{Longitud\ del\ intervalo}{Número\ de\ rectángulos} = \frac{b-a}{n}$$

$$\Delta x = \frac{1-0}{5} = 0.2$$

Para calcular **la medida de la altura** se debe calcular la ordenada de la función, por lo que se puede realizar de dos formas de acuerdo con lo siguiente:

- Si se obtiene una **aproximación por defecto** los rectángulos serán inscritos (rectángulos cafés) y el valor de x que se debe de sustituir en la función es el que está a la izquierda de la base de cada rectángulo x_{i-1}
- Si se obtiene un **aproximación por exceso** los rectángulos serán circunscritos (rectángulos azules) y el valor de x que se debe sustituir en la función es el que está a la derecha de la base de cada rectángulo x_i



Aproximación de área por exceso (rectángulos azules)				
No. de rectángulos	Longitud de cada base	Valor de x_i	Longitud de cada altura	Área del rectángulo
1	0.2	0.2	$y = (0.2)^2 = 0.04$	$A_1 = (0.2)(0.04) = 0.008$
2	0.2	0.4	$y = (0.4)^2 = 0.16$	$A_2 = (0.2)(0.16) = 0.032$
3	0.2	0.6	$y = (0.6)^2 = 0.36$	$A_3 = (0.2)(0.36) = 0.072$
4	0.2	0.8	$y = (0.8)^2 = 0.64$	$A_4 = (0.2)(0.64) = 0.128$
5	0.2	1	$y = (1)^2 = 0.1$	$A_5 = (0.2)(1) = 0.2$

Área aproximada por exceso de la curva $y = x^2$ para el intervalo $[0, 1]$

$$A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

$$A_T = 0.008 + 0.032 + 0.072 + 0.128 + 0.2$$

$$A_T = 0.44$$

Aproximación de área por defecto (rectángulos cafés)				
No. de rectángulos	Longitud de cada base	Valor de x_{i-1}	Longitud de cada altura	Área del rectángulo
1	0.2	0	$y = (0)^2 = 0$	$A_1 = (0.2)(0) = 0$
2	0.2	0.2	$y = (0.2)^2 = 0.04$	$A_2 = (0.2)(0.04) = 0.008$
3	0.2	0.4	$y = (0.4)^2 = 0.16$	$A_3 = (0.2)(0.16) = 0.032$
4	0.2	0.6	$y = (0.6)^2 = 0.36$	$A_4 = (0.2)(0.36) = 0.072$
5	0.2	0.8	$y = (0.8)^2 = 0.64$	$A_5 = (0.2)(0.64) = 0.128$

Área aproximada por defecto de la curva $y = x^2$ para el intervalo $[0, 1]$

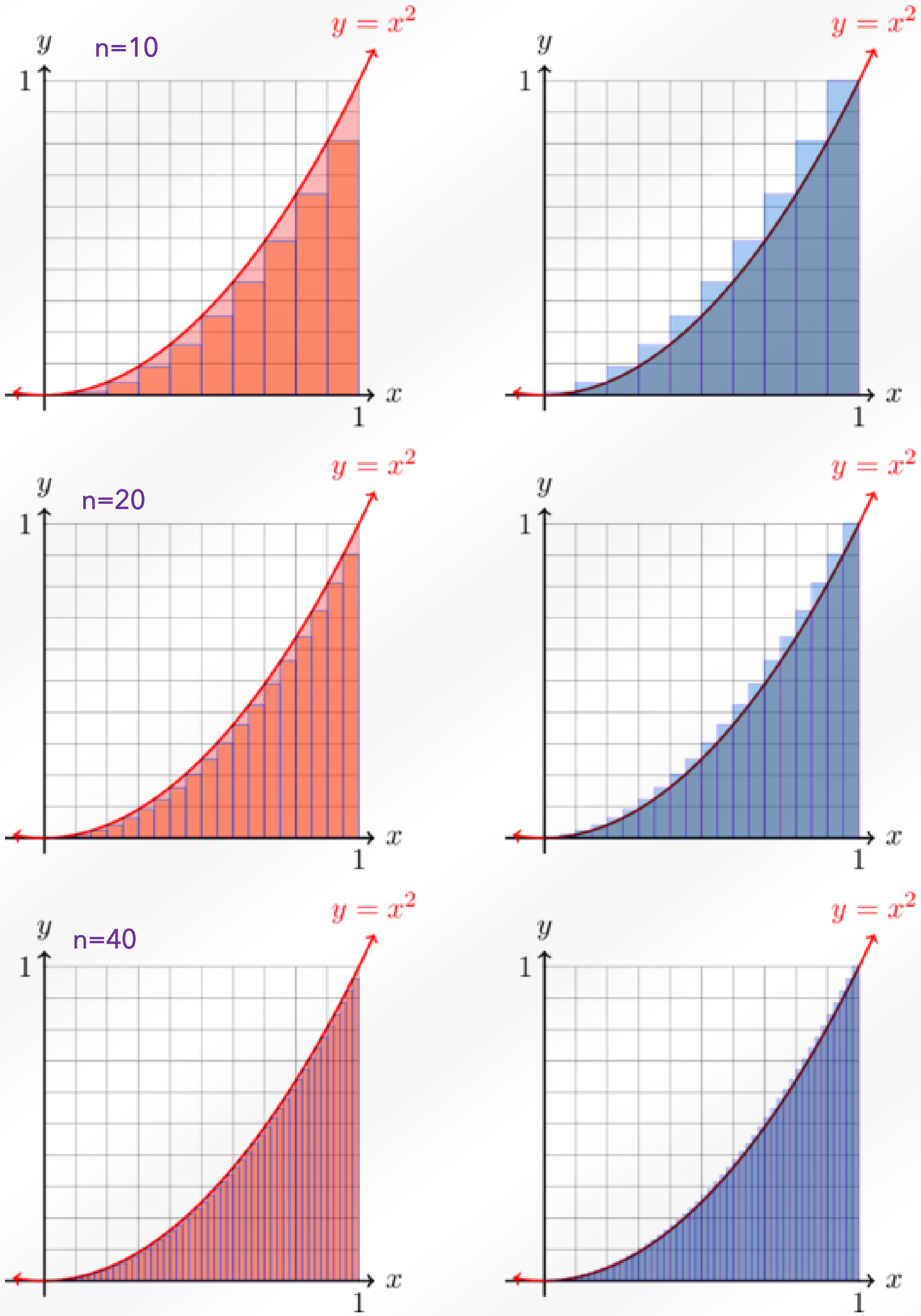
$$A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

$$A_T = 0 + 0.008 + 0.032 + 0.072 + 0.128$$

$$A_T = 0.24$$

El tamaño del error dependerá de la cantidad de rectángulos que dibujemos para hacer la aproximación. A mayor cantidad de rectángulos, las regiones de cada rectángulo que queden por encima o por debajo serán cada vez más pequeños que la suma de todos esos errores será despreciable:

En la siguiente imagen se muestran tres casos donde se observa que al aumentar el número de rectángulos el área es más cercana al área de la parábola.



En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos de las áreas totales para diferente número de rectángulos en el intervalo (0,1).

n	$A_{defecto}$	A_{exceso}
10	0.285	0.385
20	0.309	0.359
50	0.323	0.343
100	0.328	0.338

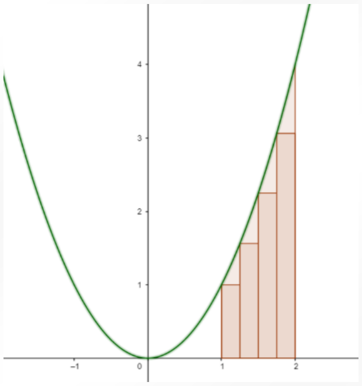
Entre más rectángulos dibujemos más exactitud tendremos, sin embargo, r ealizar el cálculo de las áreas de 10 o más rectángulos puede resultar laborioso y tardado.

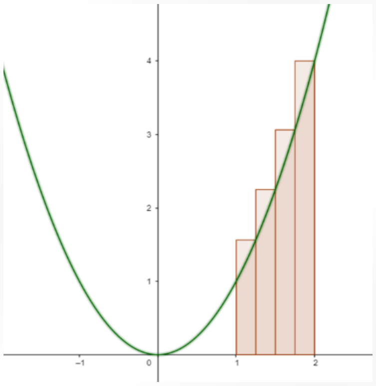
Ejemplos:

Aproxima el área bajo la curva por defecto y por exceso para las siguientes funciones

a) $f(x) = x^2$ en el intervalo $[1, 2]$ con $n = 4$

Trazamos la gráfica de la función en el intervalo $[1, 2]$ con rectángulos inscritos y rectángulos circunscritos.





Obtenemos la longitud de la base con la fórmula

$$Longitud\ de\ la\ base(\Delta x) = \frac{Longitud\ del\ intervalo}{Número\ de\ rectángulos} = \frac{b-a}{n}$$

$$\Delta x = \frac{2-1}{4} = 0.25$$

Calculamos la longitud de la altura y el área de cada rectángulo

Aproximación de área por defecto				
No. de rectángulos	Longitud de cada base	Valor de x	Longitud de cada altura $y = x^2$	Área del rectángulo (base) (altura)
1	0.25	1	$y = (1)^2 = 1$	$A_1 = (0.25)(1) = 0.25$
2	0.25	1.25	$y = (1.25)^2 = 1.5625$	$A_2 = (0.25)(1.5625) = 0.390625$
3	0.25	1.5	$y = (1.5)^2 = 2.25$	$A_3 = (0.25)(2.25) = 0.5625$
4	0.25	1.75	$y = (1.75)^2 = 3.0625$	$A_4 = (0.25)(3.0625) = 0.765625$

Área aproximada por defecto de la curva $y = x^2$ para el intervalo $[1, 2]$

$$A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$A_T = 0.25 + 0.390625 + 0.5625 + 0.765625$$

$$A_T = 1.96875$$

Calculamos la longitud de la altura y el área de cada rectángulo

Aproximación de área por exceso				
No. de rectángulos	Longitud de cada base	Valor de x	Longitud de cada altura $y = x^2$	Área del rectángulo (base) (altura)
1	0.25	1.25	$y = (1.25)^2 = 1.5625$	$A_1 = (0.25)(1.5625) = 0.390625$
2	0.25	1.50	$y = (1.5)^2 = 2.25$	$A_2 = (0.25)(2.25) = 0.5625$
3	0.25	1.75	$y = (1.75)^2 = 3.0625$	$A_3 = (0.25)(3.0625) = 0.765625$
4	0.25	2	$y = (2)^2 = 4$	$A_4 = (0.25)(4) = 1$

Área aproximada por exceso de la curva $y = x^2$ para el intervalo $[1, 2]$

$$A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$A_T = 0.390625 + 0.5625 + 0.765625 + 1$$

$$A_T = 2.71875$$

Se puede usar un algoritmo más simplificado para calcular las áreas por defecto o por exceso.

Área por defecto A_d (rectángulos inscritos)

$$A_d = \Delta_x \cdot f(x_{i-1}) = \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\right)$$

Donde $x_0 = a$

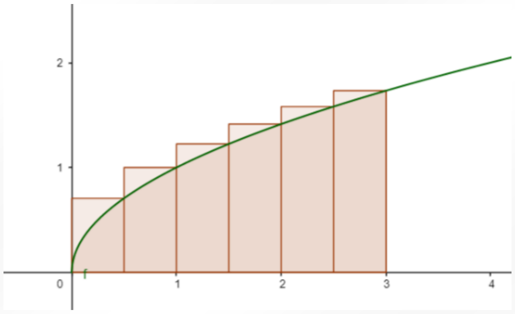
Área por exceso A_e (rectángulos circunscritos)

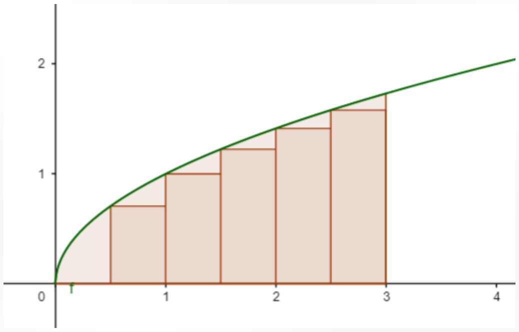
$$A_e = \Delta_x \cdot f(x_i) = \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_n)\right)$$

Donde $x_n = b$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[0, 3]$ con $n = 6$

Trazamos la gráfica de la función en el intervalo $[0, 3]$ con rectángulos inscritos y rectángulos circunscritos





Obtenemos la longitud de la base con la fórmula

$$Longitud\ de\ la\ base(\Delta x) = \frac{Longitud\ del\ intervalo}{Número\ de\ rectángulos} = \frac{b-a}{n}$$

$$\Delta x = \frac{3-0}{6} = 0.5$$

Para **rectángulos inscritos** los valores de x son: (se inicia tomando límite inferior)

$x = 0, \quad x = 0.5, \quad x = 1, \quad x = 1.5, \quad x = 2, \quad x = 2.5$

Calculando su altura para cada valor de x sustituyendo en $f(x_{i-1}) = \sqrt{x}$

$f(0) = \sqrt{0} = 0 \quad f(0.5) = \sqrt{0.5} \quad f(0.5) = \sqrt{1} = 1 \quad f(1.5) = \sqrt{1.5}$

$f(2) = \sqrt{2} \quad f(2.5) = \sqrt{2.5}$

Aplicando la fórmula

$$A_d = \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\right)$$

$$A_d = (0.5)(0 + \sqrt{0.5} + 1 + \sqrt{1.5} + \sqrt{2} + \sqrt{2.5})$$

$$A_d = 0.5(5.9272) =$$

$$A_e = 2.9636$$

Para **rectángulos circunscritos** los valores de x son: (se termina con el límite superior)

$x = 0.5, \quad x = 1, \quad x = 1.5, \quad x = 2, \quad x = 2.5, \quad x = 3$

Calculando su altura para cada valor de x sustituyendo en $f(x_i) = \sqrt{x}$

La única altura que nos falta calcular es la de $f(3) = \sqrt{3}$

Aplicando la fórmula

$$A_e = \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_n)\right)$$

$$A_e = (0.5)(\sqrt{0.5} + 1 + \sqrt{1.5} + \sqrt{2} + \sqrt{2.5} + \sqrt{3})$$

$$A_e = 0.5(7.6592)$$

$$A_e = 3.8296$$

Manos a la obra

Aproxima el área bajo la curva por defecto y por exceso para las siguientes funciones

1) $f(x) = x^2 - 1$ en el intervalo $[1, 3]$ con $n = 5$
2) $f(x) = x^3$ en el intervalo $[0, 2]$ con $n = 4$
3) $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 2]$ con $n = 5$
4) $f(x) = \sqrt{x+1}$ en el intervalo $[-1, 3]$ con $n = 8$
5) $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[0, 1]$ con $n = 5$

Aproximación por el método del trapecio

El método del Trapecio es otra forma de aproximar el área de una curva, su nombre radica porque la figura geométrica es un trapecio. Es muy parecido al método del rectángulo solo que su área se obtiene por medio de $A = \left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}b\right)h$

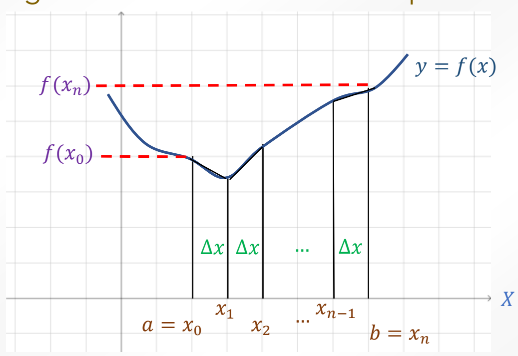
El área aproximada que está limitada por la curva en el intervalo $[a, b]$ es:

$$A = \left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + \frac{1}{2}f(x_n)\right)\Delta x \qquad \text{donde} \quad x_0 = a,\ x_n = b$$

$n =$ Número de partes iguales en las se se divide el intervalo $[a, b]$

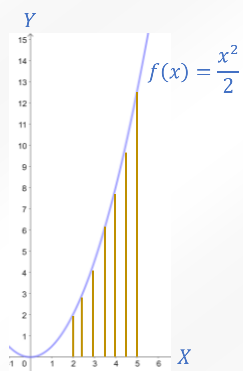
$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Donde Δx es la longitud de la altura de cada trapecio.



a) Aproxima el área utilizando la fórmula de trapecios, dividiendo el intervalo [2,5] en 6 partes iguales.

$$f(x) = \frac{x^2}{2}$$



Los datos son:

$$a = 2, \qquad b = 5, \qquad n = 6,$$

Con los cuales se obtiene la longitud de cada parte:

$$\Delta x = \frac{5-2}{6} = 0.5$$

Se determina las ordenadas de los puntos mediante la función $y = \frac{x^2}{2}$, de 0.5 en 0.5

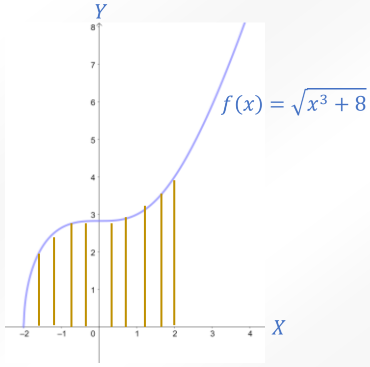
x_n	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$f(x_n) = \frac{x^2}{2}$	2	3.125	4.5	6.125	8	10.125	12.5

Se aplica la fórmula de trapecios para obtener el área en el intervalo $[2,5]$,

$$A = \left(\frac{1}{2}(2) + 3.125 + 4.5 + 6.125 + 8 + 10.125 + \frac{1}{2}(12.5)\right)0.5$$

$$A = 19.5625u^2$$

2) Aproxima el área bajo la curva por el método de trapecios para $f(x) = \sqrt{x^3 + 8dx}$ con $n = 10$



Los datos son:

$$a = -2, \quad b = 2, \quad n = 10$$

Se obtiene el valor de Δx,

$$\Delta x = \frac{2 - (-2)}{10} = 0.4$$

Se realiza la tabla para encontrar las ordenadas de x_n, sustituyendo en:

$$f(x) = \sqrt{x^3 + 8}$$

x_n	-2	-1.6	-1.2	-0.8	-0.4	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2
$f(x_n)$	0	1.975	2.504	2.736	2.817	2.828	2.839	2.917	3.118	3.477	4

Se aplica la fórmula de área de trapecios

$$A = \left(\frac{1}{2}(0) + 1.975 + 2.504 + 2.736 + 2.817 + 2.828 + 2.839 + 2.917 + 3.118 + 3.477 + \frac{1}{2}(4)\right)0.4$$

$$A = 10.884u^2$$

3) Encuentra el área aproximada de $f(x) = sen\ x^2$ para el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ con $n = 5$

Se tiene los siguientes datos:

$$a = 0, \quad b = \frac{\pi}{2} \quad n = 5$$

La longitud de la altura de cada trapecio está determinada por,

$$\Delta x = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{5} = \frac{\pi}{10}$$

Se realiza la tabulación para obtener las ordenadas de la función $f(x) = sen\ x^2$

x_n	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x_n)$	0	0.0955	0.3455	0.6545	0.9045	1

Se aplica la fórmula de área de trapecios

$$Área = \left(\frac{1}{2}(0) + |-0.5877| + |-0.5877| + 0.5877 + 0.5877 + \frac{1}{2}(0)\right)\left(\frac{\pi}{10}\right) = 0.7385$$

$$A = 0.7385u^2$$

Manos a la obra

Utiliza el método de trapecios para obtener las siguientes áreas:

1) $f(x) = 2$ en el intervalo $[1, 3]$ con $n = 4$

2) $f(x) = 2x - 1$ en el intervalo $[2, 4]$ con $n = 8$

3) $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 4]$ con $n = 10$

4) $f(x) = \cos x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ con $n = 5$

5) $f(x) = x^3 - 1$ en el intervalo $[1, 2]$ con $n = 4$

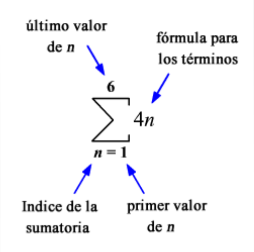
Notación SIGMA

Para poder representar sumas de manera compacta usamos la sumatoria o notación Sigma. Por ejemplo, si queremos sumar los primeros 10 números de una serie, se puede expresar como:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = \sum_{i=1}^{10} i$$

Aquí Σ (sigma) significa que estamos sumando todos los números de la forma indicada cuando el índice i recorre todos los enteros consecutivos, comenzando con el entero que aparece debajo de Σ y finaliza con el entero arriba de Σ. Como se observa en el ejemplo anterior se utiliza la letra i, pero también se acostumbra a usar la j.

Los elementos de la sumatoria se muestran a continuación:



Para la sumatoria se remplaza por n los valores 1, 2, 3, 4, 5 y 6

$$\sum_{i=1}^{6} 4i = 4(1) + 4(2) + 4(3) + 4(4) + 4(5) + 4(6)$$
$$= 4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 = 84$$

Realiza las siguientes sumatorias

$$a)\ \sum_{n=1}^{5} (n-2) = (1-2) + (2-2) + (3-2) + (4-2) + (5-2)$$
$$= -1 + 0 + 1 + 2 + 3 = 5$$

$$b)\ \sum_{j=2}^{7} n^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2$$
$$= 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 = 139$$

$$c)\ \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{49}{20}$$

Las sumatorias tienen ciertas propiedades que permiten hacer más sencillas las operaciones

$$i.\ \sum_{i=a}^{n} k = (n-a+1)k$$

$$ii.\ \sum_{i=a}^{n} [f(i) \pm g(i)] = \sum_{i=a}^{n} f(i) \pm \sum_{i=a}^{n} g(i)$$

$$iii.\ \sum_{i=a}^{n} c\, f(i) = c \sum_{i=a}^{n} f(i)$$

Fórmulas para algunas sumas especiales

Al determinar áreas de regiones, con frecuencia necesitaremos considerar la suma de los primeros n enteros positivos, así como la suma de los cuadrados, cubos, etcétera. Hay fórmulas útiles para éstas.

1. $\sum_{i=1}^{n} c = c + c + c + \cdots + c = cn \qquad c = constante$

2. $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

5. $\sum_{i=1}^{n} i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

Ejemplos

1. Encuentre una fórmula para

$$\sum_{i=1}^{n}(i^2 + 2i)$$

Se separa el binomio en sumatorias individuales aplicando la propiedad ii

$$= \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} 2i$$

En la segunda sumatoria se aplica la propiedad iii

$$= \sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i$$

Aplicando las fórmulas correspondientes

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} + n^2 + 1$$

$$= \frac{2n^3 + 9n^2 + n + 6}{6}$$

2. Encuentre una fórmula para

$$\sum_{j=1}^{n}(j+2)(j-5)$$

Primero multiplicamos los binomios

$$\sum_{j=1}^{n}(j+2)(j-5)=\sum_{j=1}^{n}(j^2-3j-10)$$

Se separa el trinomio en sumatorias individuales aplicando la propiedad ii

$$=\sum_{j=1}^{n}j^2-\sum_{j=1}^{n}3j-\sum_{j=1}^{n}10$$

En la segunda sumatoria se aplica la propiedad iii

$$=\sum_{j=1}^{n}j^2-3\sum_{j=1}^{n}j-\sum_{j=1}^{n}10$$

Aplicando las fórmulas correspondientes

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-3\frac{n(n+1)}{2}-10n$$

$$=\frac{n}{6}[2n^2+3n+1-9n-9-60]$$

$$=\frac{n(n^2-3n-34)}{3}$$

$$=\frac{n^3-3n^2-34n}{3}$$

3. Realiza la sumatoria

$$c)\sum_{i=1}^{30}(i^3+2)=$$

Se separa el binomio en sumatorias individuales aplicando la propiedad ii

$$=\sum_{i=1}^{30}i^3+\sum_{i=1}^{30}2$$

Aplicando las fórmulas especiales

$$\sum_{i=1}^{n}i^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \qquad\qquad \sum_{i=1}^{n}c=cn$$

Así

$$\sum_{i=1}^{30} i^3 + \sum_{i=1}^{30} 2 = \left[\frac{30(30+1)}{2}\right]^2 + 2(30) = 216225 + 60$$

Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{30} (i^3 + 2) = 216285$$

4. ¿Cuántas esferas hay en la pirámide que se muestra en la figura?

Como la pirámide tiene base cuadrangular el lado se eleva al cuadrado por lo que se puede representar matemáticamente de la siguiente manera.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 7^2 = \sum_{i=1}^{7} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{7(8)(15)}{6} = 140$$

Por lo tanto, hay 140 esferas en la pirámide.

Si la pirámide tuviera 20 niveles ¿Cuántas esferas habría?

$$\sum_{i=1}^{20} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{20(21)(41)}{6} = 2870$$

$$\sum_{i=1}^{20} i^2 = 2870$$

Manos a la obra

a) Encuentra los valores de la suma indicada

1) $\sum_{k=1}^{5} (k+1)$

2) $\sum_{i=2}^{7} 3(i-2)$

3) $\sum_{i=1}^{4} 2i^2$

4) $\sum_{j=1}^{4} (2^j - j)$

5) $\sum_{i=3}^{6} \frac{1}{i-2}$

b) Escribe la suma que se indica en la notación sigma

1) $1+2+3+\cdots+30=$

2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$

3) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{20}$

c) Utiliza las fórmulas de sumas especiales para calcular la suma

1) $\sum_{i=1}^{20}(2i+3)$

2) $\sum_{i=1}^{50}(i^2-5i)$

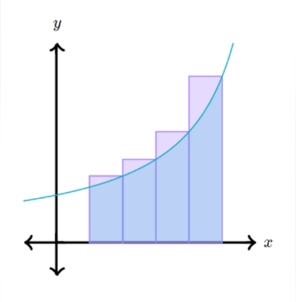
3) $\sum_{j=1}^{n}(j^2-2j+3)$

4) $\sum_{k=1}^{n}(4k^3+3k)$

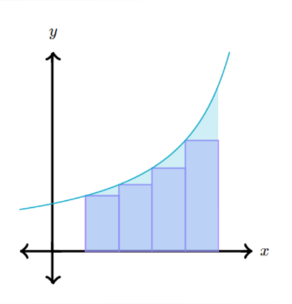
Suma de Riemann

Una suma de Riemann es una aproximación del área bajo la curva, al dividirla en varios rectángulos.

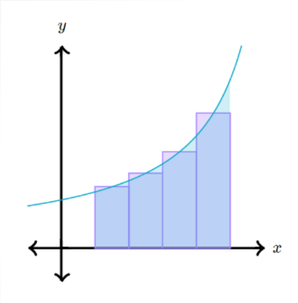
En una suma de Riemann izquierda aproximamos el área con rectángulos (normalmente de ancho igual), donde la altura de cada rectángulo es igual al valor de la función en el extremo izquierdo de su base.



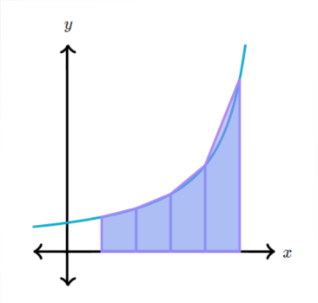
En una suma de Riemann derecha la altura de cada rectángulo es igual al valor de la función en el extremo derecho de su base.



En una suma de Riemann de punto medio la altura de cada rectángulo es igual al valor de la función en el punto medio de su base.

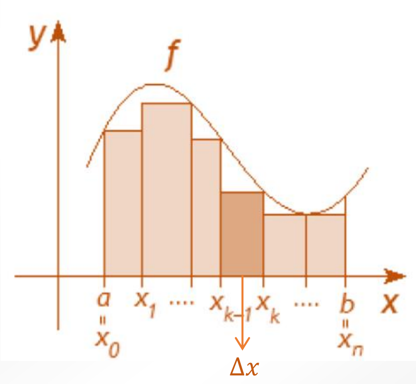


Podemos también usar trapecios para aproximar el área. En este caso, cada trapecio toca la curva en sus dos vértices superiores.



Para cada tipo de aproximación, mientras más formas usemos más cercana será la aproximación al área real.

Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo [a, b] el área A bajo la gráfica de $f(x)$ en el intervalo dado, se obtiene realizando estimaciones con rectángulos inscritos o circunscritos como se ilustra.



Considerando que los rectángulos tienen bases con la misma longitud se establece que $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Como el área bajo la curva es la sumatoria de las áreas de todos los rectángulos inscritos, por lo que para cualquier número de rectángulos se tiene:

Rectángulos inscritos

$$A = \sum_{k=1}^{n} \Delta x \cdot f_{x_{k-1}}$$

$$A = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot f(a + (k-1)\Delta x$$

Rectángulos circunscritos

$$A = \sum_{k=1}^{n} \Delta x \cdot f_{x_k}$$

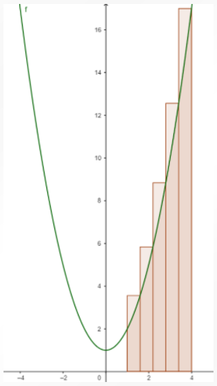
$$A = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot f(a + k\Delta x)$$

Encuentra el área limitada por la función $f(x) = x^2 + 1$ para el intervalo $[1, 4]$ usando la suma de Rieman para

a) 5 rectángulos circunscritos

b) 10 rectángulos circunscritos

a) Resolviendo para 5 rectángulos circunscritos



donde a=1 y b=4

se usa la fórmula

$$A = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot f(a + k\Delta x)$$

Si:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$$

$$a + k\Delta x = 1 + \frac{3}{n}k$$

$$f(a + k\Delta x) = f\left(1 + \frac{3}{n}k\right) = \left(1 + \frac{3}{n}k\right)^2 + 1 = 1 + \frac{6k}{n} + \frac{9k^2}{n^2} - 1 = \frac{6k}{n} + \frac{9k^2}{n^2}$$

Sustituyendo en

$$A = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot f(a + k\Delta x)$$

$$A = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{n} \cdot \left(\frac{6k}{n} + \frac{9k^2}{n^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{18k}{n^2} + \frac{27k^2}{n^3}$$

Como n es una constante puede salir de la sumatoria de acuerdo con la propiedad iii y se pueden separar en dos sumatorias de acuerdo con la propiedad ii

$$A=\frac{18}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{27}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

Aplicando las fórmulas especiales

$$A=\frac{18}{n^2}\cdot\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)+\frac{27}{n^3}\cdot\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

Simplificando

$$A=\frac{36n^2+45n+9}{2n^2}$$

Con esta fórmula se puede calcular el área para cualquier número de rectángulos

Así para n= 5

$$A=\frac{36(5)^2+45(5)+9}{2(5)^2}=\frac{567}{25}$$

$$A=22.68$$

b) para obtener el resultado aproximado del área para 10 rectángulos circunscritos también se sustituye en la relación encontrada.

Para n=10

$$A=\frac{36(10)^2+45(10)+9}{2(10)^2}=\frac{4059}{200}$$

$$A=20.295$$

Encuentra el área limitada por la función $f(x)=x^2$ para el intervalo $[0,1]$ usando la suma de Riemann para

a) 5 rectángulos inscritos

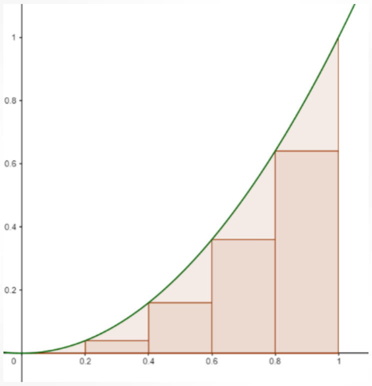
b) 20 rectángulos inscritos

a) Resolviendo para 5 rectángulos inscritos

donde a=0 y b=1

se usa la fórmula

$$A=\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}\cdot f(a+(k-1)\Delta x$$



Si:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

$$a + (k-1)\Delta x = 0 + (k-1)\frac{1}{n}$$

$$f(a + k\Delta x) = f\left(\frac{1}{n}(k-1)\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 (k-1)^2 = \frac{1}{n^2}(k^2 - 2k + 1)$$

Sustituyendo en

$$A = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot f(a + k\Delta x)$$

$$A = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n^2}(k^2 - 2k + 1)\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^3}(k^2 - 2k + 1)$$

Como n es una constante puede salir de la sumatoria de acuerdo con la propiedad iii y se pueden separar en tres sumatorias de acuerdo con la propiedad ii

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^3}(k^2 - 2k + 1) = \frac{1}{n^3}\left[\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1\right]$$

Aplicando las fórmulas especiales

$$A = \frac{1}{n^3} \cdot \left[\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) - 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + n\right]$$

$$A = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

Con esta fórmula se puede calcular el área para cualquier número de rectángulos

Así para n= 5

$$A = \frac{1}{3} - \frac{1}{2(5)} + \frac{1}{6(5)^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{10} + \frac{1}{150}$$

$$A = \frac{6}{25} = 0.24$$

b) para obtener el resultado aproximado del área para 10 rectángulos inscritos también se sustituye en la relación encontrada.

Para n=10

$$A = \frac{1}{3} - \frac{1}{2(10)} + \frac{1}{6(10)^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{20} + \frac{1}{600}$$

$$A = \frac{57}{200} = 0.285$$

Entre más rectángulos se usen el valor del área bajo la curva será cada vez más cercano al valor real.

Por lo que si crece el número de rectángulos de tal manera que tienda a +∞, entonces se tendrá un limite por lo que la Suma de Riemann quedará expresada de la siguiente manera

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta x \cdot f_{x_k}$$

Para saber más

Manos a la obra

Emplea sumas de Riemann con rectángulos inscritos encuentra el valor del área limitada por la curva, el eje X, las rectas dadas o el intervalo indicado. Trazando la gráfica en cada caso.

1. $f(x) = 3x - 4; \;\; x = 2, \;\; x = 5$ para n=5

2. $f(x) = 9 - x^2 \;\; x = 1, x = 3$ para n=10

3. $f(x) = x^3 \;\; x = 0, x = 2$ para n=8

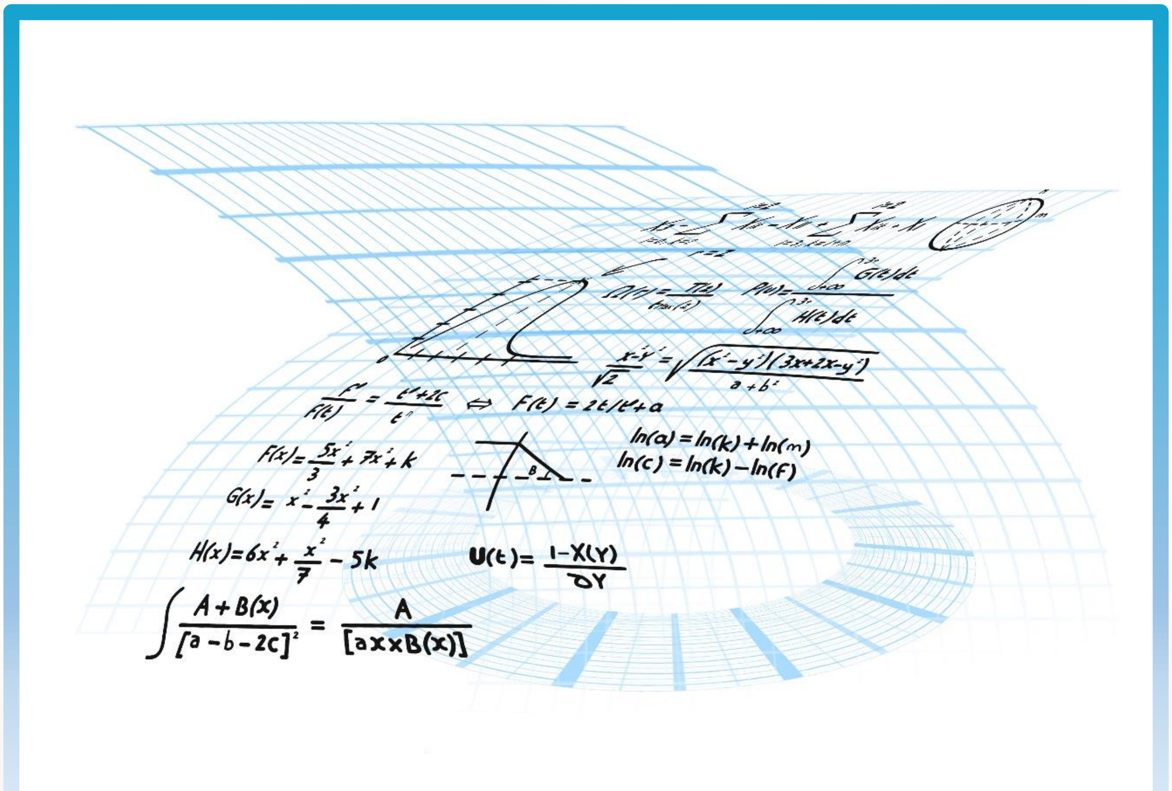
Calcula el área limitada por la curva f(x) y el eje X en el intervalo indicado utilizando sumas inferiores (rectángulos inscritos)

1. $f(x) = (x + 1)^2$ en el intervalo $[-2, 0]$ para n=10

2. $f(x) = x^3 - 1$ en el intervalo $[1, 3]$ para n=8

Evaluando tus aprendizajes

II. CALCULAS ANTIDERIVADAS DE FUNCIONES



APRENDIZAJES ESPERADOS

- Encuentra la antiderivada de funciones elementales polinomiales
- Descubre relaciones inversas entre derivación e integración: "Si de una función se obtiene su derivada, qué obtengo si de esa derivada encuentro su antiderivada"
- Interpreta por extensión o generalización, la integral indefinida de funciones polinomiales y trigonométricas básicas (seno y coseno)

En Matemáticas las operaciones elementales que conocemos se dan en parejas

Veamos el siguiente ejemplo:

Supongamos que tenemos el número 6 y le sumamos el 3

6 + 3 el resultado es **9**

ahora queremos obtener el número original nuevamente, para lograrlo necesitamos aplicar la operación inversa de la suma (la resta), así:

9 – 3 el resultado es **6** el número original **como era de esperarse**

Así como se ejemplifico con este par de operaciones, existen otras operaciones

suma ↔ resta **producto ↔ cociente** **potenciación ↔ radicación**

En donde la segunda operación "deshace" a la primera y viceversa

Valorando lo que sabes

Determina las derivadas de las siguientes funciones

a) $f(x) = 2$

b) $f(x) = 2x$

c) $f(x) = 7x^2$

d) $f(x) = \frac{1}{x^5}$

e) $f(x) = \sqrt{x}$

g) $f(x) = (x-4)^2$

h) $f(x) = e^{2x}$

i) $f(x) = sen\ 2x$

j) $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 1$

k)) $f(x) = 3x^3 - \frac{2}{x} - 3x^{-2}$

Antiderivadas

En el curso pasado estudiaste en calculo diferencial las derivadas y el proceso que usaste para obtenerla la derivación. Si queremos resolver ecuaciones que incluyan derivadas necesitaremos su inversa, denominada antiderivación o integración.

Es decir, dada una función f, encontrar una función F cuya derivada sea f'.
En otras palabras, para una función dada f, ahora pensamos en f como una derivada. Deseamos encontrar una función F cuya derivada sea f; es decir, $F'(x) = f(x)$ para toda x en algún intervalo. Planteado en términos generales, es necesario diferenciar en reversa.

Particularicemos con el siguiente ejemplo.

¿Cuál es la antiderivada de 2? Es decir, que función al derivarla se obtiene 2.

Si $f'(x) = 2 \quad \rightarrow \quad f(x) = 2x$ ya que la derivada de $2x$ es 2

Pero también puede ser soluciones las siguientes funciones

$f(x) = 2x + 3$

$f(x) = 2x + 10$

$f(x) = 2x - 2$

$f(x) = 2x + \frac{1}{2}$

$f'(x) = 2$

Antiderivada. Se dice que una función F es una antiderivada de una función f sobre algún intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para toda x en I.

Ejemplo:

Una antiderivada de $f(x) = 2x$ es $F(x) = x^2$, puesto que $F'(x) = 2x$.
Una función siempre tiene más de una antiderivada.

Así, en el ejemplo anterior,

$F_1(x) = x^2 - 1$ y $F_2(x) = x^2 + 10$ también son antiderivadas de $f(x) = 2x$, puesto que $F'_1(x) = F'_2(x) = 2x$.

Antiderivadas generales

Cualquier antiderivada de f debe ser de la forma $G(x) = F(x) + C$; es decir, dos antiderivadas de la misma función pueden diferir a lo más en una constante.

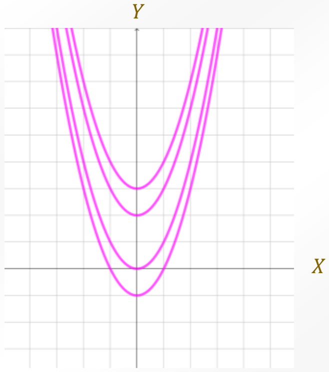
Por tanto, $F(x) + C$ es la antiderivada más general de $f(x)$.

Si $G'(x) = F'(x)$ para toda x en algún intervalo $[a, b]$, entonces

$$G(x) = F(x) + C \qquad \text{Para toda } x \text{ en el intervalo.}$$

La notación $F(x) + C$ representa una familia de funciones; cada miembro tiene una derivada igual a $f(x)$.

Del ejemplo anterior se tiene que la antiderivada más general de $f(x) = 2x$ es la familia $F(x) = x^2 + C$. Como se ve en la gráfica de la antiderivada de $f(x) = 2x$ es una traslación vertical de la gráfica de x^2.



a) Una antiderivada de

$$f(x) = 2x + 5 \quad es \quad F(x) = x^2 + 5x$$

ya que $F´(x) = 2x + 5$.

La antiderivada más general de $f(x) = 2x + 5$ es $F(x) = x^2 + 5x + C$.

b) Una antiderivada de

$$f(x) = 3x^2 + x \quad es \quad F(x) = x^3 + \frac{1}{2}x$$

ya que $F´(x) = 3x^2 + x$

La antiderivada más general de $f(x) = 3x^2 + x \;\; es \;\; F(x) = x^3 + \frac{1}{2}x + C$

Las funciones que son inversas de las derivadas se conocen como funciones primitivas y se expresan como $F(x)$

Si una función f tiene una antiderivada, tendrá una familia de ellas, y cada miembro de esta familia puede obtenerse de uno de ellos mediante la suma de una constante adecuada. A esta familia de funciones le llamamos la antiderivada general.

La función primitiva general se le suma una constante representada con la letra C que representa a cualquier número real.

$$F(x) + C$$

Ejemplos:

Escribe las antiderivada general de las siguientes funciones

a) $f(x) = \dfrac{1}{2}$

$$F(x) = \frac{1}{2}x + C$$

OJO: Al derivar la función primitiva $F(x)$, se debe obtener la función $f(x)$

b) $f(x) = -80$

$$F(x) = -80x + C$$

c) $f(x) = 5x$

$$F(x) = \frac{5}{2}x^2 + C$$

d) $f(x) = x^3$

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$$

e) $f(x) = 2x^5 + 1$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^6 + x + C$$

f) $f(x) = x^2 + 2x$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + C$$

g) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 7x$

$$F(x) = x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + C$$

Manos a la obra

Escribe las antiderivadas generales de las siguientes funciones

a) $f(x) = 5$

b) $f(x) = 3x$

c) $f(x) = 6x - 4$

d) $f(x) = x^3 - 3$

e) $f(x) = 2x^3 + 4x$

f) $f(x) = 5x^4 - 2x^3$

g) $f(x) = 2x^3 - 8x + 4$

h) $f(x) = 3x^6 - 5x^3 + 2x - 1$

Integración indefinida

Una condición suficiente para que una función f admita primitivas sobre un intervalo es que sea continua en dicho intervalo.
Si una función f admite una primitiva sobre un intervalo, admite una infinidad, que difieren entre sí en una constante: si F_1 y F_2 son dos primitivas de f, entonces existe un número real C, tal que $F_1 = F_2 + C$. A C se le conoce como constante de integración.

Como consecuencia, si **F es una primitiva de una función f**, el conjunto de sus primitivas es $F + C$. A dicho conjunto se le llama integral indefinida de f y se representa como:

$$\int \boldsymbol{f(x)dx}$$

El proceso de hallar la primitiva de una función se conoce como **antiderivación o integración** y es por tanto el inverso de la derivación.

Notación de la integral indefinida.

Por conveniencia, se introducirá la notación para una antiderivada de una función. Si $F'(x) = f(x)$, la antiderivada más general de f se representa por

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

El símbolo $\int$. fue introducida por Leibniz y se denomina **signo integral**.

La notación $\int f(x)\,dx$ se denomina **integral indefinida** de $f(x)$ respecto a x. La función $f(x)$ se denomina **integrando**.

El número C se denomina **constante de integración**. Justo como $\frac{d}{dx}(\quad)$ denota la operación de diferenciación de ( ) con respecto a x, el simbolismo $\int(\quad)dx$ denota la operación de integración de ( ) con respecto a x.
La diferenciación y la integración son fundamentalmente operaciones inversas. Si $\int(x)\,dx = F(x) + C$, entonces F es la antiderivada de f; es decir, $F'(x) = f(x)$ y así

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C \qquad (1)$$

Además, $$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}(F(x) + C) = F'(x) = f(x) \qquad (2)$$

En palabras, (1) y (2) son, respectivamente:

- Una antiderivada de la derivada de una función es esa función más una constante.
- La derivada de una antiderivada de una función es esa función.

A partir de lo anterior se concluye que siempre que se obtiene la derivada de una función, al mismo tiempo se obtiene una fórmula de integración. Por ejemplo, debido a (1), si

$\frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n$ entonces $\int \frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1}dx = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$

$\frac{d}{dx} In|x| = \frac{1}{x}$ entonces $\int \frac{d}{dx} In|x| dx = \int \frac{1}{x} dx = In|x| + C,$

$\frac{d}{dx} sen\ x = \cos x$ entonces $\int \frac{d}{dx} sen\ x\ dx = \int \cos x\ \ dx = sen\ x + C,$

$\frac{d}{dx} tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$ entonces $\int \frac{d}{dx} tan^{-1} x\ dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx = tan^{-1} x + C,$

De esta manera es posible construir una fórmula de integración a partir de cada fórmula de derivada, por lo que existen decenas de fórmulas de integración.

Integrales inmediatas

En la tabla se resumen algunas fórmulas de integración más comunes

$\int adx = ax + C$	$\int \sec x \tan x\ dx = \sec x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con}\ \ n \neq -1$	$\int \csc x \cot x\ dx = -\csc x + C$
$\int \frac{1}{x} dx = In\|x\| + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arc\ sen\ x + C$
$\int \cos x\ \ dx = sen\ x + C$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arc \tan x + C$
$\int sen\ x\ dx = \ -\cos x + C$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = arc \sec\|x\| + C$
$\int sec^2\ x\ dx = \tan x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{In\ a} + C$
$\int csc^2\ x\ dx = -\cot x + C$	$\int e^x\ dx = e^x + C$

Las integrales inmediatas son todas las antiderivadas que como característica fundamental todas tienen una constante indefinida en su solución y esta es la razón por la cual se llama a esta operación matemática integral indefinida.

$$\int \underbrace{y'\ dx}_{\text{Diferencial}} = \underbrace{F(x) + C}_{\text{Función primitiva}}$$

Integral de…

Para poder integrar las diversas funciones contamos con un conjunto de fórmulas, y en el uso de estas fórmulas nos proporciona lo que conocemos como: **integración inmediata.**

Veamos unos ejemplos de integraciones inmediatas.

Integra las siguientes funciones

a) $\int 4dx$

Usando la fórmula $\int adx = ax + C$

Donde $a = 4$

$$\int 4dx = 4x + C$$

b) $\int -\sqrt{7}dx$

Usando la fórmula $\int adx = ax + C$

Donde $a = -\sqrt{7}$

$$\int -\sqrt{7}dx = -\sqrt{7}x + C$$

c) $\int x^5 dx$

Usando la fórmula $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Donde $n = 5$

$$\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C$$

d) $\int 8x^3 dx$

Primero se saca el 8 de la integral $8\int x^3 dx$

Usando la fórmula $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Donde $n = 3$

$$8\int x^3 dx = 8\left(\frac{x^{3+1}}{3+1}\right) + C = \frac{8x^4}{4} + C = 2x^4 + C$$

e) $\int \frac{1}{x^2} dx$

Subimos al numerador x^2 para poder aplicar la fórmula v^n, así

$$\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx$$

Usando la fórmula $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Donde $n = -2$

$$\int x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

f) $\int 5\sqrt[3]{x}dx$

Primero tenemos que escribir la función $\sqrt[3]{x}$ como $x^{\frac{1}{3}}$

Usando nuevamente la fórmula $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Donde $n = \frac{1}{3}$

$$\int 5x^{\frac{1}{3}}\,dx = 5\int x^{\frac{1}{3}}dx = 5\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{5x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{15}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$$

g) $\int x^{-1}dx$

Como $n = -1$, no se puede aplicar la fórmula de integración $\int x^n dx$ por lo que se usará:

$$\int \frac{1}{x}dx = In|x| + C$$

$$\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = ln|x| + C$$

h) $\int (3x^4 - 2x)dx$

Se separa el binomio en dos integrales

$\int (3x^4 + 2x)dx = \int 3x^4 dx + \int 2xdx$ integrando cada una

$$\int 3x^4 dx = 3\int x^4 dx = \frac{3x^5}{5} + C_1$$

$$\int 2xdx = 2\int xdx = \frac{2x^2}{2} + C_2 = x^2 + C_2$$

$$\int (3x^4 + 2x)dx = \frac{3x^5}{5} + C_1 + x^2 + C_2 = \frac{3x^5}{5} + x^2 + (C_1 + C_2)$$

La suma de dos o más constantes da otra constante $C_1 + C_2 = C$

Por lo que la integral será:

$$\int (3x^4 + 2x)dx = \frac{3x^5}{5} + x^2 + C$$

i) $\int (5x^4 - 2x^2 - 8)dx$

Se integra por separado cada término

$$\int 5x^4\, dx = 5\int x^4\, dx = 5\frac{x^5}{5} + C_1 = x^5 + C_1$$

$$-\int 2x^2\, dx = -2\int x^2\, dx = -2\frac{x^3}{3} + C_2 = -\frac{2}{3}x^3 + C_2$$

$$\int -8\, dx = -8x + C_3$$

$$\int (5x^4 - 2x^2 - 8)dx = x^5 - \frac{2}{3}x^3 - 8x + C$$

j) $\int \cos x\, dx$

Usando la fórmula $\int \cos x = -\operatorname{sen} x + C$

$$\int \cos x\, dx = -\operatorname{sen} x + C$$

k) $\int (3e^x + 2x)dx$

Se integra por separado cada término

Usando la fórmula $\int e^x = e^x + C$ para el primer término

$$\int 3e^x dx = 3\int e^x dx = 3e^x + C_1$$

$$\int 2x\, dx = 2\frac{x^2}{2} + C_2 = x^2 + C_2$$

$$\int (3e^x + 2x)dx = 3e^x + x^2 + C$$

Manos a la obra

Resuelve las siguientes integrales

1) $\int 100dx$

11) $\int 2x^2 + 5$

2) $\int -0.7dx$

3) $\int \frac{4}{7}dx$

4) $\int 2.5xdx$

5) $\int \frac{4x}{3}dx$

6) $\int 7x^9dx$

7) $\int 3\sqrt{x}\,dx$

8) $\int \frac{4}{x^3}dx$

9) $\int x^{-5}\,dx$

10) $\int \pi xdx$

12) $\int \left(3x^3 + 4x^2 - \frac{7}{9}\right)dx$

13) $\int \left(3x^{-3} + 4x^2 - x^{\frac{3}{5}}\right)dx$

14) $\int x^2(x+1)dx$

15) $\int \left(\frac{1}{x^2} - 6x\right)dx$

16) $\int \left(\sqrt{x} + 4x^2 - \frac{3}{2}\right)dx$

17) $\int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt[5]{x^3}\right)dx$

18) $\int \left(\frac{6x^3 - 2x^2}{2x}\right)dx$

19) $\int \left(\frac{18x^2 - 6x + 9}{3x^2}\right)dx$

20) $\int (e^x - cosx)dx$

Integrales de funciones de la forma v^n y $\frac{dv}{v}$

Como se ha visto en los ejemplos anteriores tenían en común que su variable era x, sin embargo, muchas integrales no tienen solo la x como variable sino v esta puede ser una expresión polinómica o trascendental aunque sigue aplicando integración inmediata puesto que solamente sustituye la variable principal en la fórmula correspondiente, pero siempre se deberá de determinar el diferencial de cada función a integrarse, y sólo hasta que el diferencial de la variable principal $\boldsymbol{dv}$ esté completo se podrá integrar la función $\boldsymbol{f(v)}$.

$$\int \overbrace{f(v) \quad dv}^{\text{Integrando}} \quad = \quad \overbrace{F(v) + C}^{\text{Función primitiva}}$$

Integral de… Función de la variable $\boldsymbol{u}$ Diferencial

Se debe recordar que antes de integrar correctamente, el diferencial $\boldsymbol{dv}$ nos señala cuál es la variable principal, sobre la cual se integra la función.

La v del problema es la primera pregunta que nos haremos siempre al resolver una integral, porque definiendo la v del problema, procederemos a resolver conforme a esa referencia.

Por lo que la tabla anterior se redefine introduciendo v y dv

$\int adx = ax + C$	$\int \sec v \tan v \, dv = \sec v + C$
$\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con } n \neq -1$	$\int \csc v \cot v \, dv = -\csc v + C$
$\int \frac{dv}{v} = In\lvert v\rvert + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} dv = arc\ sen\ v + C$
$\int \cos v \ \ dv = sen\ v + C$	$\int \frac{1}{1+v^2} dv = arc \tan v + C$
$\int sen\ v\ dv = -\cos v + C$	$\int \frac{1}{v\sqrt{v^2-1}} dx = arc \sec\lvert v\rvert + C$
$\int sec^2\ v\ dv = \tan v + C$	$\int a^v dv = \frac{a^v}{In\ a} + C$
$\int csc^2\ v\ dv = -\cot v + C$	$\int e^v\ dv = e^v + C$

Se realizarán integraciones de potencia y de cociente aplicando las siguientes fórmulas

$$\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con } n \neq -1 \qquad \text{y} \qquad \int \frac{dv}{v} = In\lvert v\rvert + C$$

Realiza las siguientes integrales

a) $\int (x+2)^4 dx$

Usando la fórmula $\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C$

Eligiendo $\quad v = x + 2 \quad \rightarrow \quad dv = 1dx$

Se aplica la fórmula

$$\int (x+2)^4 dx = \int v^4 dv = \frac{v^{4+1}}{4+1} + C = \frac{v^5}{5} + C$$

pero como $v = x + 2$ entonces sustiuimos

$$\frac{v^5}{5} + C = \frac{(x+2)^5}{5} + C$$

Así:

$$\int (x+2)^4 dx = \frac{(x+2)^5}{5} + C$$

b) $\int 3(x^3+7)^5 x^2\,dx$

Usando la fórmula $\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C$

Eligiendo $v = x^3 + 7 \quad \rightarrow \quad dv = 3x^2 dx$

Se aplica la fórmula

$$\int 3(x^3+7)^5 x^2\,dx = \int v^5 \cdot dv = \frac{v^{5+1}}{5+1} + C = \frac{v^6}{6} + C$$

pero como $v = x^3 + 7$ entonces sustiuimos

$$\frac{v^6}{6} + C = \frac{(x^3+7)^6}{6} + C$$

Así:

$$\int 3(x^3+7)^5 x^2\,dx = \frac{(x^3+7)^6}{6} + C$$

c) $\int (3x+1)^{-2} dx$

Usando la fórmula $\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C$

Eligiendo $v = 3x + 1 \quad \rightarrow \quad dv = 3dx$ donde $\frac{dv}{3} = dx$ así $dx = \frac{1}{3} dv$

Se aplica la fórmula

$$\int (3x+1)^{-2} dx = \int v^{-2} \cdot \frac{1}{3} dv = \frac{1}{3}\int v^{-2} dv = \frac{1}{3} \cdot \frac{v^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{1}{3} \cdot \frac{v^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{3v} + C$$

pero como $v = 3x + 1$ entonces sustiuimos , así:

$$-\frac{1}{3v} + C = -\frac{1}{3(3x+1)} + C$$

Así:

$$\int (3x+1)^{-2} dx = -\frac{1}{3(3x+1)} + C$$

d) $\int x\sqrt{(x^2-5)}\,dx$

Reacomodando la integral para usar la fórmula $\int v^n dv$

$$\int x\sqrt{(x^2-5)}\,dx = \int (x^2-5)^{\frac{1}{2}}\, x dx$$

Usando la fórmula $\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C$

Eligiendo $v = x^2 - 5 \rightarrow dv = 2xdx$ donde $\frac{dv}{2} = xdx$ así $xdx = \frac{1}{2}dv$

Se aplica la fórmula

$$\int (x^2-5)^{\frac{1}{2}} xdx = \int v^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} dv = \frac{1}{2}\int v^{\frac{1}{2}} dv = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{v^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

pero como $v = x^2 - 5$ entonces sustiuimos

$$\frac{v^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{(x^2-5)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

Así:

$$\int (x^2-5)^{\frac{1}{2}} xdx = \frac{(x^2-5)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

e) $\int \frac{x}{x^2-1}\, dx$

Usando la fórmula $\int \frac{dv}{v} = ln|v| + C$

Eligiendo $v = x^2 - 1 \rightarrow dv = 2xdx$ donde $\frac{dv}{2} = xdx$ así $xdx = \frac{1}{2}dv$

Se aplica la fórmula

$$\int \frac{x}{x^2-1}\, dx = \int \frac{1}{2}\frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{2} ln|v| + C$$

pero como $v = x^2 - 1$ entonces sustiuimos

$$\frac{1}{2} ln|v| + C = \frac{1}{2} ln|x^2-1| + C$$

Así:

$$\int \frac{x}{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2} ln|x^2-1| + C$$

f) $\int \frac{2x+1}{x^2+x}\, dx$

Usando la fórmula $\int \frac{dv}{v} = ln|v| + C$

Eligiendo $v = x^2 + x \rightarrow dv = (2x+1)dx$

Se aplica la fórmula

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx = \int \frac{dv}{v} = ln|v| + C$$

pero como $v = x^2 + x$ entonces sustiuimos

$ln|v| + C = ln|x^2 + x| + C$

Así:

$$\int \frac{x}{x^2+x}\,dx = ln|x^2 + x| + C$$

g) $\int \frac{e^{4x}}{e^{4x}+3}\,dx$

Aunque tiene la función exponencial esta integral se resuelve con la formula $\frac{dv}{v}$

Usando la fórmula $\int \frac{dv}{v} = ln|v| + C$

Eligiendo $v = e^{4x} + 3 \rightarrow dv = 4e^{4x}dx$ donde $\frac{dv}{4} = e^{4x}dx$ así $e^{4x}dx = \frac{1}{4}dv$

Se aplica la fórmula

$$\int \frac{e^{4x}}{e^{4x}+3}\,dx = \int \frac{1}{4}\frac{dv}{v} = \frac{1}{4}\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{4}ln|v| + C$$

pero como $v = e^{4x} + 3$ entonces sustiuimos

$\frac{1}{4}ln|v| + C = \frac{1}{4}ln|e^{4x} + 3\,| + C$

Así:

$$\int \frac{e^{4x}}{e^{4x}+3}\,dx = \frac{1}{4}ln|e^{4x} + 3| + C$$

$h)$ $\int (\sin 5x)^3 \cdot \cos 5x\ \,dx$

Aunque tiene funciones trigonométricas esta integral se resuelve con la formula v^n

Usando la fórmula $\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C$

Eligiendo $v = sen\ 5x \rightarrow dv = 5\cos 5x\,dx$ donde $\frac{dv}{5} = cos\ 5x\ dx$ así $\cos 5x\,dx = \frac{1}{5}dv$

Se aplica la fórmula

$$\int (\sin 5x)^3 \cdot \cos 5x \ dx = \int v^3 \cdot \frac{1}{5} dv = \frac{1}{5} \int v^3 dv = \frac{1}{5} \cdot \frac{v^{3+1}}{3+1} + C = \frac{1}{5} \cdot \frac{v^4}{4} + C = \frac{v^4}{20} + C$$

pero como $v = \sin 5x$ entonces sustiuimos

$$\frac{v^4}{20} + C = \frac{(\sin 5x)^4}{20} + C$$

Así:

$$\int (\sin 5x)^3 \cdot \cos 5x \ dx = \frac{(\sin 5x)^4}{20} + C$$

Para saber más

Manos a la obra forma

Resuelve las siguientes integrales

1. $\int (x-2)^5 dx$
2. $\int x\,(x^2+1)^5 dx$
3. $\int \frac{x}{x^2+4} dx$
4. $\int z\sqrt{4+z^2} dz$
5. $\int x\sqrt{1-x^2} dx$
6. $\int \frac{e^x}{2+e^x} dx$
7. $\int \frac{5}{\sqrt{2t+1}} dt$
8. $\int (\cos x)^6 (sin\ x) dx$
9. $\int (x^3-5)^4\, x^2\, dx$
10. $\int \left(\frac{2x-3}{x^2-3x}\right) dx$

Integrales de funciones exponenciales

Las siguientes fórmulas se emplean para integrar funciones exponenciales

$$\int a^v dv = \frac{a^v}{In\ a} + C \qquad\qquad \int e^v\, dv = e^v + C$$

Realiza las siguientes integrales

$a)\ \int e^{5x} dx$

Se escoge la variable de acuerdo con la fórmula que se va a emplear, en este caso,

$v = 5x,$ su diferencial $dv = 5dx$ donde, $dx = \frac{dv}{5}$

Se realiza el cambio de variable y el resultado es,

$$\int e^{5x} dx = \int e^v \frac{dv}{5} = \frac{1}{5}\int e^v dv = \frac{1}{5}e^v + C = \frac{1}{5}e^{5x} + C$$

Así: ,

$$\int e^{5x} = \frac{1}{5}e^{5x} + C$$

$b)\ \int e^{\frac{x}{8}} dx$

$v = \frac{x}{8}$, $dv = \frac{1}{8}dx$ donde, $dx = 8dv$

Por consiguiente, al realizar la sustitución se obtiene:

$$\int e^{\frac{x}{8}}\, dx = 8\int e^v\, dv = 8e^v + C = 8e^{\frac{x}{8}} + C$$

Así:

$$\int e^{\frac{x}{8}} dx = 8e^{\frac{x}{8}} + C$$

$c)\ \int 6^{3x} dx$

$a = 6$ $v = 3x$, $dv = 3dx$ donde, $dx = \frac{1}{3}dv$

Por consiguiente, al realizar la sustitución se obtiene:

$$\int 6^{3x} dx = \frac{1}{3}\int 6^{3x} dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{6^{3x}}{ln6} + C$$

Así:

$$\int 6^{3x} dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{6^{3x}}{ln6} + C$$

$d)\ \int \frac{dx}{a^{2x}}$

Reescribimos la ecuación para poder usar la fórmula de a^v

$$\int \frac{dx}{a^{2x}} = \int a^{-2x}dx$$

$v = -2x, dv = -2dx$ donde, $\frac{dv}{-2} = dx$

$$\int \frac{dx}{a^{2x}} = \int a^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\int a^{v}dv = -\frac{1}{2}\frac{a^{v}}{lna} + C = -\frac{1}{2}\frac{a^{-2x}}{lna} + C = \frac{1}{2a^{2x} \cdot lna} + C$$

Así:

$$\int \frac{dx}{a^{2x}} = \frac{1}{2a^{2x} \cdot lna} + C$$

e) $\int x^5 \cdot e^{x^6}dx$

Se escoge la variable de acuerdo con la fórmula que se va a emplear, en este caso,

$v = x^6,$ su diferencial $dv = 6x^5dx$ donde, $x^5dx = \frac{dv}{6}$

Se realiza el cambio de variable y el resultado es,

$$\int x^5 \cdot e^{x^6}dx = \int e^{v}\frac{dv}{6} = \frac{1}{6}\int e^{v}dv = \frac{1}{6}e^{v} + C = \frac{1}{6}e^{x^6} + C$$

Así: ,

$$\int x^5 \cdot e^{x^6}dx = \frac{1}{6}e^{x^6} + C$$

Manos a la obra

Realiza las siguientes integrales:

1. $\int e^{9x}dx$
2. $\int 6e^{\frac{x}{2}}dx$
3. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$
4. $\int 3x^2e^{x^3}dx$
5. $\int 7^{2x}dx$
6. $\int \sqrt[3]{a^x}dx$
7. $\int \frac{dx}{5^{4x}}$
8. $\int \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx$
9. $\int x^2\left(3 - e^{x^3}\right)dx$
10. $\int x^3 \cdot 5^{x^4}$

Integrales de funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas se integran con las siguientes fórmulas y en algunos casos auxiliándose de un cambio de variable.

1. $\int sen\ v\ dv = -\cos v + C$

2. $\int \cos v\ dv = sen\ v + C$

3. $\int \sec^2 v\ dv = tan\ v + C$

4. $\int \csc^2 v\ dv = -cot\ v + C$

5. $\int \sec v \tan v\ dv = sec\ v + C$

6. $\int \csc v \cot v\ \ dv = -csc\ v + C$

7. $\int \tan v\ dv = -In|\cos v| + C = In|\sec v| + C$

8. $\int \cot v\ dv = In|sen\ v| + C$

9. $\int \sec v\ dv = In|\sec v + \tan v| + C$

10. $\int \csc v\ dv = In|\csc v - \cot v| + C$

Obtén el resultado de las siguientes integrales

a) $\int \cos 5y\ dy$

Se hace un cambio de variable y se obtiene su diferencial:

$$v = 5y, \quad dv = 5dy, \quad \text{donde, } \frac{dv}{5} = dy$$

Se sustituye y se resuelve la integral:

$$\int \cos 5y\ dy = \int \cos v\ \frac{dv}{5} = \frac{1}{5}\int \cos v\ dv = \frac{1}{5} sen\ v + C = \frac{1}{5}\ sen\ 5y + C$$

Así:

$$\int \cos 5y\ dy\ = \frac{1}{5}\ sen\ 5y + C$$

b) $\int sec\ 9x\ dx$

$$v = 9x, \quad dv = 9dx \qquad \text{donde, } \frac{dv}{9} = dx$$

Se sustituye y se resuelve la integral:

$$\int sec\ 9x\ dx = \frac{1}{9}\int sec\ \ v\ dv = \frac{1}{9} ln|\sec v + \tan v| + C = \frac{1}{9} ln|\sec 9x + \tan 9x| + C$$

Así:

$$\int sec\ 9x\ dx = \frac{1}{9} ln|\sec 9x + \tan 9x| + C$$

c) $\int x \cot x^2 dx$

$$v = x^2, \quad dv = 2x\ dx \quad \text{donde,} \quad \frac{dv}{2} = x\ dx$$

Se sustituye y se resuelve la integral:

$$\int x \cot x^2 dx = \int \cot v \frac{dv}{2} = \frac{1}{2}\int \cot v\ dv = \frac{1}{2}\ ln|sen\ v| + C = \frac{1}{2} n|sen\ x^2| + C$$

Así:

$$\int x \cot x^2 dx = \frac{1}{2} ln|sen\ x^2| + C$$

d) $\int 3x^4 \cos x^5 dx$

$$v = x^5, \quad dv = 5x^4\ dx \quad \text{donde,} \quad \frac{dv}{5} = x^4\ dx$$

Se sustituye y se resuelve la integral:

$$\int 3x^4 \cos x^5 dx = 3\int \cos v \frac{dv}{5} = \frac{3}{5}\int \cos v\ dv = \frac{3}{5}\ sen\ v + C = \frac{3}{5}\ sen\ x^5 + C$$

Así:

$$\int 3x^4 \cos x^5 dx = \frac{3}{5}\ sen\ x^5 + C$$

e) $\int \frac{tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

La fórmula que se va a utilizar es $\int \tan v\ dv = In|\sec v| + C$, de esta manera que:

$$v = \sqrt{x}, \qquad dv = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad \text{donde,} \quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dv$$

Se realiza la sustitución y se resuelve la integral:

$$\int \frac{tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2\int \tan v\ dv = 2ln|\sec v| + C = 2ln\left|\sec \sqrt{x}\right| + C$$

Así:

$$\int \frac{tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2ln\left|\sec \sqrt{x}\right| + C$$

$$f)\int \frac{2\tan x}{1-tan^2x}dx$$

Antes de resolver esta integral se recomienda emplear identidades trigonométricas.

Donde

$$\tan x=\frac{sen\ x}{\cos x} \qquad sen\ 2x=2senxcosx \qquad \cos 2x=cos^2 x-sen^2 x$$

$$\frac{2\tan x}{1-tan^2x}=\frac{2\frac{sen\ x}{\cos x}}{1-\left(\frac{sen\ x}{\cos x}\right)^2}=\frac{2\frac{sen\ x}{\cos x}}{1-\frac{sen^2x}{cos^2x}}=\frac{\frac{2sen\ x}{\cos x}}{\frac{cos^2x-sen^2x}{cos^2x}}=$$

$$\frac{2\ sen\ x\cdot cos^2x}{\cos x(cos^2x-sen^2x)}=\frac{2\ sen\ x\cos x}{cos^2\ x-sen^2x}=\frac{sen\ 2x}{\cos 2x}=\tan 2x$$

Al sustituir la identidad encontrada, se tiene

$$\int \frac{2\tan x}{1-tan^2x}dx=\int \tan 2x\ dx,$$

Donde

$$v=2x, \quad dv=2dx; \quad dx=\frac{dv}{2}$$

Se realiza la sustitución y se resuelve la integral.

$$\int \frac{2\tan x}{1-tan^2x}dx=\int \tan 2x\ dx=\frac{1}{2}\int \tan v\ dv=-\frac{1}{2}ln|\cos v|+C=-\frac{1}{2}ln|\cos 2x|+C$$

Así:

$$\int \frac{2\tan x}{1-tan^2x}dx=-\frac{1}{2}ln|\cos 2x|+C$$

Manos a la obra

Determina las siguientes integrales:

1. $\int sen\ 3x\ dx$
2. $\int \cos 8x\ dx$
3. $\int sen\frac{x}{3}dx$
4. $\int \frac{sen\ x}{cos^2x}dx$
5. $\int \cot x\sqrt{\csc x}$
6. $\int x\ sen\ 4\,x^2dx$
7. $\int x^2cos\frac{x^3}{5}dx$
8. $\int 3x\ sec^2\,4x^2\ dx$
9. $\int csc^2(3x-1)dx$
10. $\int \frac{cos^2\ x}{sen\ x}dx$

Integrales con expresiones de la forma $\sqrt{v^2 \pm a^2}, \sqrt{a^2 - v^2}, v^2 \pm a^2, a^2 - v^2$

1. $\int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} arc\tan\frac{v}{a} + C$

2. $\int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{v-a}{v+a}\right| + C$

3. $\int \frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{a+v}{a-v}\right| + C$

4. $\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = arc\ sen\frac{v}{a} + C$

5. $\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C$

6. $\int \frac{dv}{v\sqrt{v^2 - a^2}} = \frac{1}{a} arc\sec\frac{v}{a} + C$

7. $\int \sqrt{a^2 - v^2} dv = \frac{v}{2}\sqrt{a^2 - v^2} + \frac{a^2}{2} arc\ sen\frac{v}{a} + C$

8. $\int v^2 \pm a^2 dv = \frac{v}{2}\sqrt{v^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} ln\left(v \pm \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C$

Resuelve las siguientes integrales

$a) \int \frac{dx}{x^2 + 36}$

Se utiliza la fórmula (1)

$$\int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} arc\tan\frac{v}{a} + C$$

Se deducen las siguientes equivalencias y se sustituyen la fórmula.

$$v^2 = x^2,\ v = x \text{ y } dv = dx;\ a^2 = 36, a = 6$$

por consiguiente,

$$\int \frac{dv}{x^2 + 36} = \frac{1}{6} arc\tan\frac{x}{6} + C$$

$b) \int \frac{dx}{16x^2 - 9}$

Se utiliza la fórmula (2)

$$\int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln \left| \frac{v-a}{v+a} \right| + C$$

Se determina la variable y se encuentra su diferencial,

$$v^2 = 16x, \;\; v = 4x, \;\; dv = 4dx \text{ y } \frac{dx}{4} = dx; \; a^2 = 9, a = 3$$

Finalmente, se realiza la sustitución y se resuelve la integral.

$$\int \frac{dv}{16x^2 - 9} = \frac{1}{4} \int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2(3)} ln \left| \frac{4x-3}{4x+3} \right| + C = \frac{1}{24} ln \left| \frac{4x-3}{4x+3} + C \right|$$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 25}}$

Se utiliza la fórmula (5)

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C$$

Se deducen las siguientes equivalencias y se sustituyen la fórmula.

$$v^2 = x^2, \;\; v = x \text{ y } dv = dx; \; a^2 = 25, a = 5$$

por consiguiente,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 25}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 25} + C\right.$$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 25x^2}}$

Se utiliza la fórmula (4)

$$\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = arc\ sen \frac{v}{a} + C$$

Se deduce a, v y la diferencial dv

$$a^2 = 9, a = 3; v^2 = 25x^2, v = 5x, dv = 5dx \quad \text{donde, } \frac{dv}{5} = dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 25x^2}} = \frac{1}{5} \int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \frac{1}{5} arc\ sen \frac{v}{a} + C = \frac{1}{5} arc\ sen \frac{5x}{3} + C$$

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 25x^2}} = \frac{1}{5} arc\ sen \frac{5x}{3} + C$$

Manos a la obra la forma

Realiza las siguientes integrales:

1) $\int \frac{dx}{x^2 + 81}$

2) $\int \frac{dy}{y^2 - 16}$

3) $\int \frac{dx}{25 - 4x^2}$

4) $\int \frac{dx}{2x^2 - 16}$

5) $\int \frac{dx}{9x^2 - 144}$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - 9x^2}}$

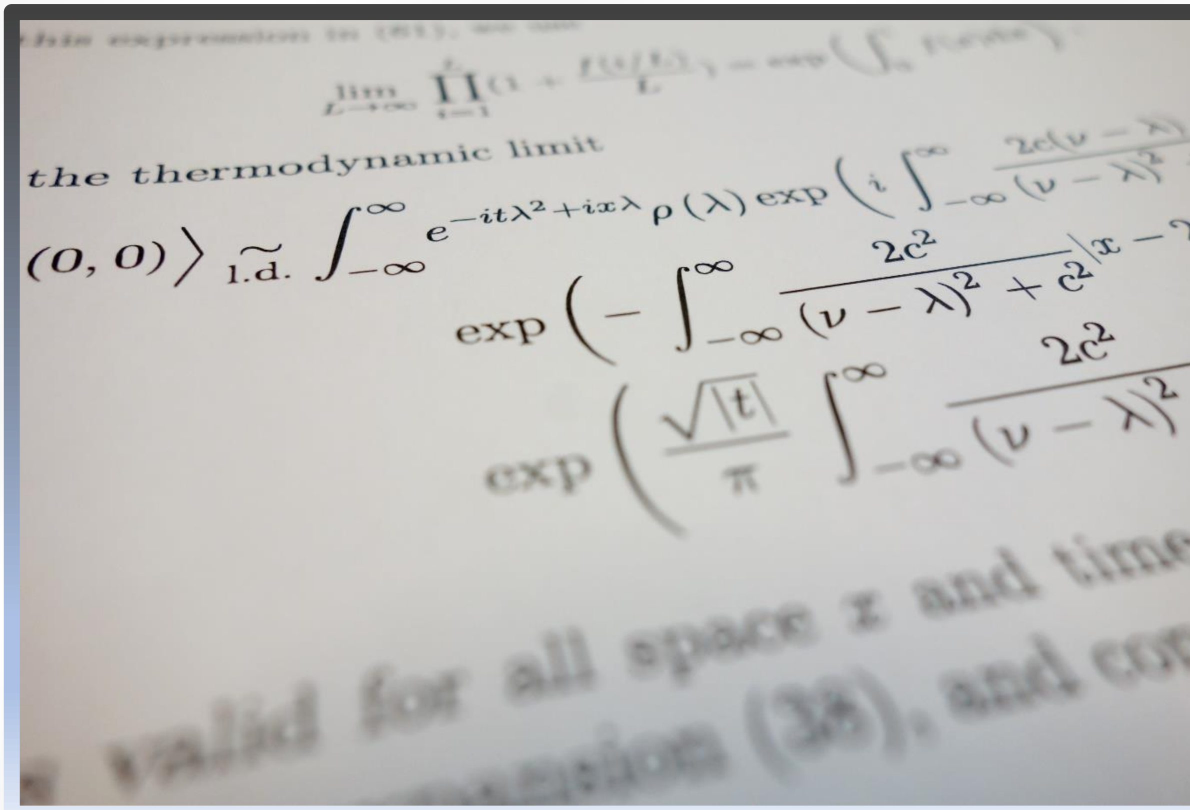
7) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 7}}$

8) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 - 9}}$

Para saber más

Evaluando tus aprendizajes

III. APLICAS DIVERSAS TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN



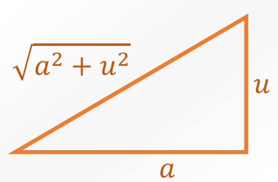
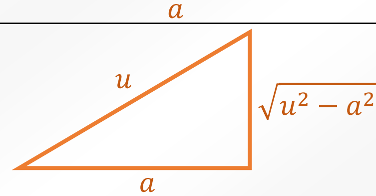
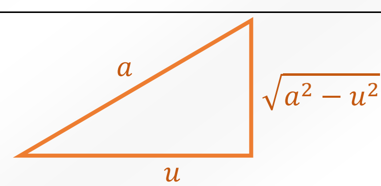
APRENDIZAJES ESPERADOS

- Utiliza técnicas para la antiderivación de funciones conocidas
- Obtiene la integral indefinida de una función dada
- Calcula la antiderivada de funciones trigonométricas básicas

En el bloque anterior se realizaron integrales basados en fórmulas que permitieron por medio de una simple sustitución obtener el resultado, pero no siempre es posible completar el diferencial para poder integrar de una manera inmediata.
Por tal motivo se presentan diversas técnicas o métodos de integración que permitirán calcular la antiderivada de diversos tipos de funciones; de acuerdo con sus características se tomará la técnica que permita integrarla.

Integración por sustitución trigonométrica

Este método requiere de un mínimo conocimiento de trigonométrica, pues usaremos las funciones trigonométricas directas y el teorema de Pitágoras.
Este método de integración es útil para resolver integrales que involucran la suma o diferencia de dos términos cuadráticos, donde unos es variable (u^2) y el otro es constante (a^2). La raíz de cada unos de estos elementos será uno de los lados de un triángulo rectángulo, que se deberá de elaborar en cada integral por resolver, por lo que los valores posibles a tomar de cada elemento cuadrático se verán reducidos a un cateto o una hipotenusa. Dependiendo de la posición de estos elementos cuadráticos, al sumarse o restarse, se deducirá el elemento faltante del triángulo por medio del teorema de Pitágoras, quedando de la siguiente manera:

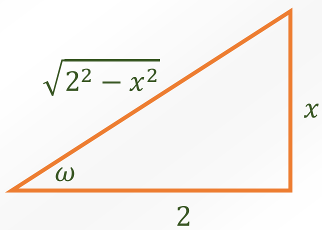
Radicado	Razonamiento	Triángulo a utilizar
$u^2 + a^2 = a^2 + u^2$	Obsérvese que la u está en el cateto opuesto, la a está en cateto adyacente y el elemento faltante $\sqrt{a^2+u^2}$ aparecerá en la hipotenusa.	
$u^2 - a^2$	Obsérvese que la u está en la hipotenusa, la a está en cateto adyacente y el elemento faltante $\sqrt{u^2-a^2}$ aparecerá en el cateto opuesto.	
$a^2 - u^2$	Obsérvese que la u está en el cateto adyacente, la a está en la hipotenusa y el elemento faltante $\sqrt{a^2-u^2}$ aparecerá en el cateto opuesto.	

Las integrales que se resuelven con este método presentan radicales que corresponden a los elementos faltantes de cada uno de los triángulos de cuadro anterior, y las posiciones de la u y de la a sólo se registran de esa manera para estandarizar soluciones.

Ejemplo:
Observa cómo se integra por sustitución trigonométrica la siguiente expresión con elementos cuadráticos del tipo algebraico:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$

Primero identificamos que los elementos cuadráticos algebraicos son: x^2 y $4 = 2^2$. Como estos corresponden a x^2 y a a^2, respectivamente, se deducirá que: $u = x$ y que $a = 2$, y como éstos están sumando se constituirá un triángulo como el siguiente:



Ahora determinaremos las tres funciones principales trigonométricas del triángulo en su ángulo ω. Quedando así:

$$sen(\omega) = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}, \quad cos(\omega) = \frac{2}{\sqrt{4+x^2}} \quad \text{y} \quad tan(\omega) = \frac{x}{2}$$

Se despejarán las variables involucradas en la integral original, tales como $\sqrt{2^2+x^2}$ y dx.

Observamos que en la función seno existe la variable en el numerador y en el denominador, por lo que los despejes son más sencillos en las funciones coseno y tangente:

$$Como: cos(\omega) = \frac{2}{\sqrt{4+x^2}} \rightarrow \sqrt{4+x^2} = \frac{2}{cos(\omega)} \quad \therefore \sqrt{4+x^2} = 2sec(\omega)$$

$$Como: tan(\omega) = \frac{x}{2} \rightarrow x = 2\,tan\,(\omega) \;\rightarrow dx = 2\,sec^2\,(\omega)d\omega$$

Sustituyendo la integral original del tipo algebraico, por cada elemento trigonométrico calculado, quedaría:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^3} = \int \frac{2\,sec^2\,(\omega)d\omega}{[2\,sec\,(\omega)]^3} = \int \frac{2\,sec^2\,(\omega)d\omega}{8\,sec^3(\omega)} = \frac{1}{4}\int \frac{d\omega}{sec(\omega)} = \frac{1}{4}\int cos(\omega)d\omega$$

$$\frac{1}{4}\int cos(\omega)d\omega = \frac{1}{4}sen(\omega) + C$$

La solución trigonométrica es: $\frac{1}{4}\,sen\,(\omega) + C$.

Volviendo a la variable original se sustituyen $sen(\omega)$ en este resultado:

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right] + C$$

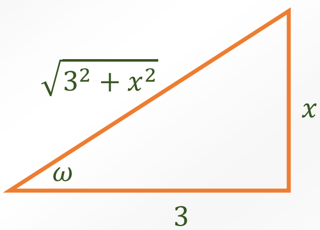
Por lo tanto

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}} = \frac{x}{4\sqrt{x^2+4}} + C$$

b) $\int \sqrt{9+x^2}dx$

Primero identificamos que los elementos cuadráticos algebraicos son: x^2 y $4 = 2^2$.

Utilizamos el siguiente triángulo



Determinamos las relaciones trigonométricas

$$sen\ \omega = \frac{x}{3} \rightarrow x = 3sen\ \omega \ \rightarrow dx = 3\cos\omega\, d\omega$$

$$\sec\omega = \frac{\sqrt{3^2+x^2}}{3} \ \rightarrow \ \sqrt{3^2+x^2} = 3\sec\omega$$

Sustituyendo la integral original, por cada elemento trigonométrico calculado

$$\int \sqrt{9x^2}dx = \int 3\sec\omega \cdot 3\cos\omega\, d\omega = 9\int \frac{1}{\cancel{\cos}\,\omega} \cdot \cancel{\cos}\,\omega\, d\omega = 9\int d\omega$$

Integrando

$$9\int d\omega = 9\omega + C$$

Volviendo a la variable original, se sustituye (ω) en este resultado usando la función tangente

$$\tan\omega = \frac{x}{3} \ \rightarrow \ \ \omega = arc\tan\frac{x}{3}$$

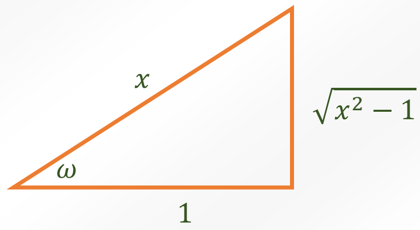
Por lo tanto

$$\int \sqrt{9+x^2}dx = 9arc\tan\omega + C$$

c) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

Primero identificamos que los elementos cuadráticos algebraicos son: x^2 y $1 = 1^2$.

Utilizamos el siguiente triángulo



Determinamos las relaciones trigonométricas

$$tan\ \omega = \frac{\sqrt{x^2-1}}{1} \rightarrow \sqrt{x^2-1} = tan\ \omega$$

$$\sec\omega = \frac{x}{1} \rightarrow x = \sec\omega$$

$$\sec\omega = \frac{x}{1} \rightarrow dx = \sec\omega\tan\omega d\omega$$

Sustituyendo la integral original, por cada elemento trigonométrico calculado

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \int \frac{\tan\omega}{\cancel{\sec\omega}} \cdot \cancel{\sec\omega}\tan\omega d\omega = \int \tan^2\omega \cdot d\omega = \int (\sec^2\omega - 1)\, d\omega$$

Integrando

$$\int (\sec^2\omega - 1)\, d\omega = \tan\omega - \omega + C$$

Volviendo a la variable original

$$\tan\omega = \frac{\sqrt{x^2-1}}{1} = \sqrt{x^2-1} \qquad sec\ \omega = \frac{x}{1} \rightarrow \omega = arc\sec x$$

Por lo tanto

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \sqrt{x^2-1} - arc\sec x + C$$

Manos a la obra

Resuelve las siguientes integrales por el método de sustitución trigonométrica y comprueba si la solución propuesta a la derecha de cada una es correcta.

Integrales	Solución
$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^4}} =$	$\frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{8}\ arc\ tan\left(\frac{x}{2}\right) + C$
$\int \frac{dx}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}} =$	$\frac{x}{2\sqrt{x^2+2}} + C$

$\int \frac{dx}{(5-x^2)^{\frac{3}{2}}} =$	$\frac{x}{5\sqrt{5-x^2}} + C$
$\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{4-t^2}} =$	$C - 2\,arc\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{4\sqrt{4-t^2}}{2}$
$\int \frac{x\,dx}{(x^2+8)^{\frac{3}{2}}} =$	$C - \frac{1}{\sqrt{x^2+8}}$
$\int \frac{u^2\,du}{(9-u^2)^{\frac{3}{2}}} =$	$\frac{u}{\sqrt{9-u^2}} + arc\cos\left(\frac{u}{3}\right) + C$
$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} =$	$ln\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}} + C$
$\int \frac{dy}{y^2\sqrt{y^2-7}} =$	$\frac{\sqrt{y^2-7}}{7y} + C$
$\int \frac{dm}{m^2+25} =$	$\frac{1}{5}\,arc\tan\left(\frac{m}{5}\right) + C$

Integración por partes

Las integrales que se resolverán por el método de integración por partes son aquellas que no se pueden integrar de manera inmediata, y generalmente su integrado está formado por dos funciones, donde una no es el diferencial de la otra.

Podemos tener integrados mezclados con funciones: *algebraicas, trigonométricas directas, inversas trigonométricas, logarítmicas o exponenciales*. La fórmula que se utilizará en la integración por partes se extrae de la regla del producto en la derivación:

$$D(u \cdot v) = udv + vdu$$

$$\int \underbrace{(u)dv}_{\text{Integrando inicial}} = (u)(v) - \int \underbrace{(v)du}_{\text{Integrado secundario}}$$

La integración por partes consiste en separar en dos partes el integrando inicial, como el integrado estará compuesto, tendremos algunas alternativas para seleccionar la u de cada integral por resolver.

Para definir correctamente la u en cada integrado debemos identificar de la integral la función prioritaria, por lo que si se tiene:

Función Logarítmica $[y = log(x),\ y = ln(x)]$

Función Inversa trigonométrica $[y = arc\ sen(x),\ y = arc\ tan(x)]$

Función Algebraica $\left[y = \sqrt{3x-7},\ y = (x^3 - 5x)\right]$

Función Trigonométrica directa $\left[y = cos\left(\sqrt{3x}\right)\right], y = sec(5x)$

Función Exponencial $\left[y = e^{4\,x},\ y = 12^{Sen(x)}\right]$

Entonces cuando el integrado de una integral presente algún caso mostrado arriba se deberá elegirse como la u de la integral por partes. Y si tiene dos funciones se elige como u la primera función de acuerdo con la relación anterior.
En cualquiera de los casos anteriores, al desarrollarse la integral por este método**, el integrado secundario deberá ser más fácil de resolver que el integrado inicial.**

Al resolver una integral por partes debemos de considerar el siguiente procedimiento sugerido:

1. Definir la u del integrado con la regla anterior. El resto del integrado será $dv.$
2. Deducir el du, a partir de la u, (derivando) y la v, a partir del dv. (integrando)
3. Sustituir todos los elementos en la fórmula:

$$\int (u)\ dv = (u)(v) - \int (v)\ du.$$

4. Integrar: $\int (v)\ du.$
5. Reducir y expresar tu respuesta.

Ejemplos:

Integra

a) $\displaystyle\int x \cdot e^x\ dx$

Primeramente, identificamos que existen dos tipos de funciones, una es algebraica (x) y la otra es exponencial (e^x).

Por medio de la relación de funciones dada anteriormente se elige de acuerdo con el orden, la algebraica, es decir u será x

$$u = x \qquad dv = e^x\ dx.$$

Derivamos u

$$u = x\ \rightarrow du = dx,$$

Integramos dv

$$dv = e^x\ dx\ \rightarrow v = \int e^x\ dx = e^x$$

Sustituyendo en la fórmula: $\int (u)\ dv = (u)(v) - \int (v)\ du.$

Se tendrá:

$$\int (x)e^{x}\,dx = (x)(e^{x}) - \int (e^{x})\,dx$$

Observa que el integrado secundario $\int e^{x}\,dx$ es más fácil de integrar que el integrado inicial: $\int e^{x}\,x\,dx$.

Por último, se integra y se reduce

$$\int (e^{x})\,dx = e^{x} + C$$

$$\int (x)\,e^{x}\,dx = (x)(e^{x}) - e^{x} + C$$

Por lo tanto:

$$\int x \cdot e^{x}\;dx = xe^{x} - e^{x} + C = e^{x}(x-1) + C$$

$b)\int \ln x\;dx.$

Para integrar funciones con logaritmos es conveniente el método de integración por partes. Como se necesitan dos funciones, basta con agregar 1 para no alterar la igualdad de la ecuación.

$$\int ln\,(x) \cdot 1dx$$

De acuerdo con la regla anterior se elige $\ln x$ como u

$$u = \ln x \qquad dv = 1\,dx.$$

Derivamos u

$$u = ln(x)\ \rightarrow du = \frac{1}{x}dx$$

Integramos dv

$$dv = 1dx\ \rightarrow v = \int 1dx \rightarrow v = x$$

Sustituyendo en la fórmula: $\int (u)\,dv = (u)(v) - \int (v)\,du.$

Se tendrá:

$$\int ln(x)\,1dx = ln(x)\ \cdot x - \int x\ \cdot \frac{1}{x}dx$$

Antes de integrar se puede simplificar por lo que

$$\int x\ \cdot \frac{1}{x}dx = \int \frac{x}{x}\,dx = 1\int dx = x + C$$

Para obtener el resultado de la integral se reescriben los resultados de las operaciones anteriores en una sola expresión:

$$\int ln(x)\, 1dx = ln(x) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x\, ln(x) - x + C$$

Por lo tanto:

$$\int \ln x \;\, dx = x \cdot ln\, x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

c) $\int x^2 \cos(x)\, dx.$

Se comienza escribiendo los argumentos:

$$u = x^2 \;\rightarrow du = 2xdx$$

$$dv = \cos(x)\, dx \;\rightarrow v = \int \cos(x)\, dx = \operatorname{sen}(x) + C$$

Después se sustituye en la fórmula de integración por partes y se escribe fuera del integrado el factor constante:

$$\int x^2 \cos(x)\, dx = x^2 \operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x) 2xdx = x^2 \operatorname{sen}(x) - 2\int x \operatorname{sen}(x) dx$$

Se observa que la integral resultante $\int x \operatorname{sen}(x) dx$ tiene un integrado compuesto por una expresión algebraica y una trigonométrica, por lo que es necesario volver a definir argumentos y utilizar otra vez el método de integración por partes:

Para

$$\int x \operatorname{sen}(x) dx$$

$$u = x \;\rightarrow du = dx$$

$$dv = \operatorname{sen}(x)\, dx \;\rightarrow v = \int \operatorname{sen}(x)\, dx = -\cos(x) + C$$

Se sustituye en la fórmula de integración por partes:

$$x^2 \operatorname{sen}(x) - 2\int x \operatorname{sen}(x) dx = x^2 \operatorname{sen}(x) - 2\left[-x\cos(x) - \int -\cos(x) dx\right]$$

Se eliminan los corchetes multiplicando por -2:

$$= x^2 \operatorname{sen}(x) + 2x\cos(x) - 2\int \cos(x) dx$$

Por último, se sustituye directamente el valor de la tercera integral calculada al principio:

$$= x^2 \operatorname{sen}(x) + 2x\cos(x) - 2\operatorname{sen}(x) + C$$

Por lo tanto:

$$\int x^2 \cos(x)\, dx = x^2 sen\; x + 2xcos\; x - 2sen\; x + C$$

Manos a la obra

Resuelve las siguientes integrales por el método por partes y comprueba si la solución propuesta a la derecha de cada una es correcta.

Integrales	Solución
$\int x\ sen\ (x)\ dx =$	$sen(x) - x\ cos(x) + C$
$\int x\ sen\left(\frac{x}{2}\right) dx$	$4\ sen\left(\frac{x}{2}\right) - 2x\ cos\left(\frac{x}{2}\right) + C$
$\int x\ sec^2(x)\ dx =$	$x\ tan(x) + ln[Cos(x)] + C$
$\int x\ cos(5\ x)\ dx =$	$\frac{cos\ (5\ x)}{25} + \frac{x\ sen\ (5\ x)}{5} + C$
$\int x\ 4^x\ dx =$	$4^x\left[\frac{x}{ln\ (4)} - \frac{1}{ln^2\ (4)}\right] + C$
$\int x^2\ ln\ (x)\ dx =$	$\frac{x^3}{3}\left[ln\ (x) - \frac{1}{3}\right] + C$
$\int arc\ tan(x)\ dx =$	$x\ arc\ tan\ (x) - ln\sqrt{1 + x^2} + C$
$\int arc\ cos\ (2x)\ dx =$	$x\ arc\ cos(2x) - \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4x^2} + C$
$\int sec^3(x)\ dx =$	$\frac{sec(x)\ tan(x)}{2} - ln\sqrt{sec\ (x) + sec(x)} + C$
$\int csc^3\ (x)\ dx =$	$C - \frac{1}{2}\ csc(x)cot(x) - ln\sqrt{csc(x) - cot(x)}$

Integración por fracciones parciales simples

Al resolver integrados de fracciones propias, cuyo denominador es prácticamente imposible completar su diferencial, se recomienda el uso del método de integración por fracciones parciales simples, el cual consiste, en transformar la fracción dada en dos o más fracciones parciales y simples, de acuerdo con el número de factores existentes en el denominador, para poder integrar una por una de manera más sencilla.
Si se tiene una fracción propia de la forma: $\frac{x-1}{x^2+3x+2}$ se podrá transformar en dos fracciones parciales simples, porque su denominador tiene dos factores:

Por lo tanto, se tiene que hacer una transformación algebraica antes de realizar la integración.
Realicemos el siguiente ejemplo previo a la integración:

Transforma a fracciones simples la fracción:

$$\frac{x-1}{x^2+3x+2}$$

Primero factorizamos el denominador

$$=\frac{x-1}{(x+1)(x+2)}$$

Ahora escribimos cada factor en fracciones separadas con numeradores como incógnitas por lo que usamos las letras A y B

$$\frac{x-1}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$

Es decir que si sumamos: $\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$ obtendremos como resultado la fracción original.

$$\frac{x-1}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$

Como es una identidad se puede quitar los denominadores por tal motivo multiplicamos cada fracción por los dos factores $(x+1)(x+2)$

$$(x+1)(x+2)\frac{x-1}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}(x+1)(x+2)+\frac{B}{x+2}(x+1)(x+2)$$

eliminando

$$\cancel{(x+1)(x+2)}\frac{x-1}{\cancel{(x+1)(x+2)}}=\frac{A}{\cancel{x+1}}\cancel{(x+1)}(x+2)+\frac{B}{\cancel{x+2}}(x+1)\cancel{(x+2)}$$

Se obtiene:

$$x-1=A(x+2)+B(x+1)$$

Para encontrar el valor de B se elimina el factor $(x-2)$ por lo que se hace $x=-2$

Sustituyendo

$$(-2)-1=A\cancel{(-2+2)}+B(-2+1)$$

$$-3=B(-1)$$

$$B=3$$

Para encontrar el valor de A se elimina el factor $(x+1)$ por lo que se hace $x=-1$

Sustituyendo

$$-1-1=A(-1+2)+B(\cancel{-1+1})$$

$$-2=A(1)$$

$$A=-2$$

Por lo que

$$\frac{x-1}{(x+1)(x+2)}=\frac{-2}{x+1}+\frac{3}{x+2}$$

Esta propiedad la aplicaremos a integrales con fracciones propias, cuyos denominadores son factorizables. Recuerda que según el número de factores que encuentres será el mismo número de fracciones parciales simples. Cuando los factores son lineales es muy probable que se pueda usar la fórmula de integración:

$$\int \frac{dv}{v}$$

Ejemplos:

Integra:

a) $\displaystyle\int \frac{(x+5)\,dx}{x^2+2x-3}$

El diferencial requerido para resolver esta integral es: $2x+2$. No podemos contemplarlos por los medios que conocemos hasta este momento, por lo que procederemos a transformar la fracción propia del integrado en dos fracciones parciales y simples:

$$\frac{x+5}{x^2+2x-3}=\frac{x+5}{(x+3)(x-1)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1}$$

Para calcular los valores de A y B, cancelaremos los factores localizados en los denominadores de cada fracción parcial simple.

$$\frac{x+5}{(x+3)(x-1)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1}\;\rightarrow x+5=A(x-1)+B(x+3)$$

$$Si\;\; x=1\;\rightarrow 1+5=A(1-1)+B(1+3)\;\rightarrow 6=4B\;\therefore\; B=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

$$Si\;\; x=-3\;\rightarrow\; -3+5=A(-3-1)+B(-3+3)\;\rightarrow 2=-4A\;\therefore\; A=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

Entonces la fracción propia será equivalente a: $\displaystyle\frac{x+5}{x^2+2x-3}=\frac{-\frac{1}{2}}{x+3}+\frac{\frac{3}{2}}{x-1}$

$$\frac{3}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+3)}=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{x-1}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+3}\right]$$

Por tanto, podremos integrar así:

$$\int \frac{(x+5)\,dx}{x^2+2x-3} = \int \left[\frac{x+5}{x^2+2x-3}\right] dx = \int \left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+3}\right)\right] dx$$

$$\int \left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)\right] dx - \int \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+3}\right)\right] dx = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+3} = \frac{3}{2} ln(x-1) - \frac{1}{2} ln(x+3) + C$$

$$= ln(x-1)^{\frac{3}{2}} - ln(x+3)^{\frac{1}{2}} + C = ln\sqrt{(x-1)^3} - ln\sqrt{x+3} + C = ln\sqrt{\frac{(x-1)^3}{x+3}} + C$$

$$b)\ \int \frac{(7x+29)dx}{x^2+8x+15}$$

Se factoriza el denominador

$$\frac{7x+29}{x^2+8x+15} = \frac{7x+29}{(x+5)(x+3)} \rightarrow \frac{7x+29}{(x+5)(x+3)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x+3}$$

Se resuelve la fracción,

$$\frac{7x+29}{(x+5)(x+3)} = \frac{A(x+3)+B(x+5)}{(x+5)(x+3)}$$

Para hallar los valores de A y B se resolverá por medio de un sistema de ecuaciones

Luego, para que se cumpla la igualdad

$$7x+29 = A(x+3) + B(x+5)$$

Se agrupan y se factorizan los términos semejantes

$$7x+29 = x(A+B) + 3A + 5B$$

Resultando un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A + B = 7 \\ 3A + 5B = 29 \end{cases}$$

La solución del sistema es: $A = 3$ y $B = 4$

Entonces:

$$\int \frac{(7x+29)}{x^2+8x+15} dx = \int \left(\frac{3}{x+5} + \frac{4}{x+3}\right) dx = \int \frac{3}{x+5} dx + \int \frac{4}{x+3} dx = 3ln|x+5| + 4ln|x+3| + C$$

Así:

$$\int \frac{(7x+29)dx}{x^2+8x+15} = ln|(x+5)^3 \cdot (x+3)^4| + C$$

c) $\int \frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x}$

Se factoriza el denominador

$$\frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}=\frac{4x-2}{x(x^2-x-2)}=\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}$$

Se hace la equivalencia como sigue:

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}$$

Se resuelve la fracción

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$$

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A(x^2-x-2)+B(x^2+x)+C(x^2-2x)}{x(x-2)(x+1)}$$

Luego, para que se cumpla la igualdad

$$4x-2=A(x^2-x-2)+B(x^2+x)+C(x^2-2x)$$

Se agrupan y se factorizan los términos semejantes

$$4x-2=x^2(A+B+C)+x(-A+B-2C)-2A$$

Resultando un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -A+B-2C=4, \\ -2A=-2 \end{cases}$$

la solución del sistema es: $A=1, B=1, C=-2$

Entonces:

$$\int \frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x}=\int \frac{dx}{x}+\int \frac{dx}{x-2}-2\int \frac{dx}{x+1}=ln|x|+ln|x-2|-2\,ln|x+1|+C$$

$$=ln|x|+ln|x-2|-ln(x+1)^2+C$$

Se aplican las leyes de los logaritmos para simplificar la expresión:

$$=ln\frac{|x(x-2)|}{(x+1)^2}+C=ln\frac{|x^2-2x|}{(x+1)^2}+C$$

Por consiguiente:

$$\int \frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x}=ln\frac{|x^2-2x|}{(x+1)^2}+C$$

Además de los denominadores con factores lineales distintos, se puede presentar el caso de que algunos se repitan. Si se tiene un factor de la forma $(ax+b)^n$, se desarrolla una suma como sigue:

$$\frac{A}{(ax+b)^n}+\frac{B}{(ax+b)^{n-1}}+\frac{C}{(ax+b)^{n-2}}+\cdots+\frac{Z}{ax+b}$$

En donde A, B, C y Z son constantes para determinar.

d) $\int \frac{(3x^2+5x)dx}{(x-1)(x+1)^2}$

$$\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}$$

$$\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+B(x-1)+C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

Luego, para que se cumpla la igualdad:

$$3x^2+5x=x^2(A+C)+x(2A+B)+A-B-C$$

Entonces se genera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A+C=3 \\ 2A+B=5, \\ A-B-C=0 \end{cases}$$

su solución es: $A=2, B=1, C=1$

Finalmente,

$$\int \frac{(3x^2+5x)dx}{(x-1)(x+1)^2}=2\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\int\frac{dx}{x+1}=2ln|x-1|-\frac{1}{x+1}+ln|x+1|+C$$

$$=ln|(x-1)(x+1)^2|-\frac{1}{x+1}+C$$

e) $\int \frac{(y^4-8)}{y^3+2y^2}dy$

Cuando el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, se efectúa la división.

$$\frac{y^4-8}{y^3+2y^2}=y-2+\frac{4y^2-8}{y^3+2y^2}$$

Entonces

$$\int\frac{(y^4-8)dy}{y^3+2y^2}=\int\left(y-2+\frac{4y^2-8}{y^3+2y^2}\right)dy$$

Se separan las integrales

$$= \int y\,dy - 2\int dy + \int \frac{(4y^2-8)dy}{y^3+2y^2} = \frac{y^2}{2} - 2y + \int \frac{(4y^2-8)dy}{y^3+2y^2}$$

La integral $\frac{(4y^2-8)dy}{y^3+2y^2}$ se resuelve mediante fracciones parciales

$$\frac{(4y^2-8)dy}{y^3+2y^2} = \frac{4y^2-8}{y^2(y+2)} \rightarrow \frac{4y^2-8}{y^2(y+2)} = \frac{A}{y^2} + \frac{B}{y} + \frac{C}{y+2}$$

$$\frac{4y^2-8}{y^2(y+2)} = \frac{A(y+2)+By(y+2)+Cy^2}{y^2(y+2)} = \frac{y^2(B+C)+y(A+2B)+2A}{y^2(y+2)}$$

De la igualdad se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} B+C=4 \\ A+2B=0, \\ 2A=-8 \end{cases}$$

La solución es: $A=-4, B=2\ y\ C=2$

La integral se separa de la siguiente manera:

$$\int \frac{(4y^2-8)dy}{y^3+2y^2} = -4\int \frac{dy}{y^2} + 2\int \frac{dy}{y} + 2\int \frac{dy}{y+2} = \frac{4}{y} + 2In|y| + 2In|y+2| + C$$

$$= \frac{4}{y} + 2(In|y| + In|y+2|) + C$$

$$= \frac{4}{y} + 2In|y^2+2y| + C$$

Se concluye que:

$$\int \frac{(y^4-8)dy}{y^3+2y^2} = \frac{y^2}{2} - 2y + \frac{4}{y} + 2\ln|y^2+2y| + C$$

Manos a la obra

Desarrolla la solución a la derecha de cada integral; resuelve cada una por el método de fracciones parciales simples.

Integral	Solución
$\int \frac{x+5}{x^2-2x-3}\,dx =$	$ln\left[\frac{(x-3)^3}{x+1}\right] + C$
$\int \frac{dx}{x^2-6x+8} =$	$ln\sqrt{\frac{x-4}{x-2}} + C$
$\int \frac{dx}{3x^2-7x+4} =$	$ln\left[\frac{3x-4}{x-1}\right] + C$

$\int \frac{2x+1}{x^2-3x-10}\,dx =$	$ln\sqrt[7]{(x+5)^9\,(x-2)^5} + C$
$\int \frac{x^2+4x-4}{x^3-4x}\,dx =$	$ln\left[\frac{x(x-2)}{x+2}\right] + C$

Obtén las siguientes integrales usando la técnica de fracciones parciales

1. $\int \frac{4x^2-2x+1}{4x^3-x}\,dx$
2. $\int \frac{(x^2+11x-30)dx}{x^3-5x^2+6x}$
3. $\int \frac{(-9x-9)dx}{x(x^2-9)}$
4. $\int \frac{(8+3x-x^2)dx}{(2x+3)(x+2)^2}$
5. $\int \frac{2x^2-5x+4dx}{(x-2)^3}$

Integraciones trigonométricas

Tipo1 $\left(\int sen^n x\,dx, \qquad \int cos^n x\,dx\right)$

$(n\ impar)$

En aquellas integrales cuya función seno o coseno se una potencia impar, se realiza la separación en potencias pares y siempre sobra una lineal, la cual funcionará como diferencial: el resto se transforma mediante las siguientes identidades trigonométricas:

$$sen^2 x = 1 - cos\,x \qquad\qquad cos^2\,x = 1 - sen^2 x$$

$a)\ \int sen^3\,x\,dx$

Se separa la potencia de la siguiente manera:

$$\int sen^3\,x\,dx = \int sen^2\,sen\,x\,dx$$

Se sustituye $sen^2\,x = 1 - cos^2\,x$, de esta forma:

$$\int sen^3\,x\,dx = \int sen^2\,x\,sen\,x\,dx = \int (1 - cos^2\,x)\,sen\,x\,dx =$$

$$\int (1 - cos^2 x)\, sen\, x\, dx = \int sen\, xdx - \int cos^2 x\, sen\, xdx$$

La primera integral se resuelve usando la fórmula $\int senx$. La segunda integral se resuelve aplicando la formula $\int v^n dv$

Así:

$$\int (1 - cos^2 x)\, sen\, x\, dx = \int sen\, xdx - \int cos^2 x\, sen\, xdx = -cos\, x\; + \frac{1}{3} cos^3\, x + C$$

Por lo tanto:

$$\int sen^3\, x\, dx = \frac{1}{3} cos^3\, x - cos\, x + C$$

b) $\int sen^5\, x\, dx$

$$\int sen^5\, x\, dx = \int sen^4\, x\, sen\, x\, dx$$

$$= \int (1 - cos^2 x)^2 sen\, x\, dx$$

$$= \int (1 - 2\, cos^2 x + cos^4\, x)\, sen\, x\, dx$$

$$= \int (1 - 2cos^2\, x + cos^4\, x)(-sen\, x\, dx)$$

$$\int (-senx + 2cos^2\, x - cos^4\, x) dx$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3} cos^3 x - \frac{1}{5} cos^5 x + C$$

$(n\, par)$

Se aplica las siguientes identidades trigonométricas

$$sen^2 x = \frac{1 - cos2x}{2} \qquad\qquad cos^2 x = \frac{1 + cos2x}{2}$$

c) $\int sen^2 x\, dx$

$$\int sen^2\, x\, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} sen2x + C$$

Por lo tanto:

$$\int sen^2\, x\, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} sen2x + C$$

d) $\int cos^4\, x\, dx$

$$\int cos^4\, x\, dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$
$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + cos^2 2x)dx$$
$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int (\cos 2x)(2)\, dx + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)dx$$
$$= \frac{3}{8}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 2x\,(2\,dx) + \frac{1}{32}\int \cos 4x\,(4\,dx)$$
$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}sen\ 2x + \frac{1}{32}sen\ 4x + C$$

Tipo 2 $\left(\int sen^m\, x\, cos^n\, x\, dx\right)$

$(m\ o\ n\ impar)$

Si m o n son enteros impares positivos y el otro exponente es cualquier número, factorizando $sen\, x$ o $\cos x$ y utilizamos la identidad $sen^2 x + cos^2\, x = 1$ para el exponente impar.

e) $\int sen^3\, x\, cos^{-4}\, x\, dx$

$$\int sen^3\, x\, cos^{-4}\, x\, dx = \int (sen^2\, x)(sen\, x)(cos^{-4}\, x)dx = \int (1 - cos^2\, x)(cos^{-4}\, x)(sen\, x)dx$$
$$= -\int (cos^{-4}\, x - cos^{-2}\, x)(-sen\, x\, dx)$$
$$= -\left[\frac{(\cos x)^{-3}}{-3} - \frac{(\cos x)^{-1}}{-1}\right] + C$$
$$= \frac{1}{3}sec^3 x - \sec x + C$$

$(m\ y\ n\ pares)$

Se aplica las siguientes identidades trigonométricas

$$sen^2 x = \frac{1 - cos2x}{2} \qquad\qquad cos^2 x = \frac{1 + cos2x}{2}$$

e) $\int sen^2\, x\, cos^4\, x\, dx$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 + \cos 2x - cos^2 2x - cos^3 2x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left[1 + \cos 2x - \frac{1}{2}(1 + cos4x) - (1 - sen^2 2x)\cos 2x\right]dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x + sen^2 2x\ cos2x\right]dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\int \frac{1}{2}dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x(4\,dx) + \frac{1}{2}\int sen^2 2x(2\cos 2x\ dx)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}sen\ 4x + \frac{1}{6}sen^3 2x\right] + C$$

$f)\int \frac{cos^3\ x\ dx}{sen^4\ x}$

$$\int \frac{cos^3\ x\ dx}{sen^4\ x} = \int \frac{cos^2\ x\ cos\ x\ dx}{sen^4\ x} = \int \frac{(1 - sen^2\ x)\ cos\ x\ dx}{sen^4\ x}$$

Se realiza el cambio de variable, $v = sen\ x$ y $dv = cos\ x\ dx$

$$\int \frac{(1 - v^2)dv}{v^4} = \int \frac{dv}{v^4} - \int \frac{dv}{v^2} = \int v^{-4}dv - \int v^{-2}dv = \frac{v^{-3}}{-3} - \frac{v^{-1}}{-1} = -\frac{1}{3v^3} + \frac{1}{v} + C$$

Pero $v = sen\ x$, entonces

$$\frac{1}{sen\ x} - \frac{1}{3sen^3\ x} + C = csc\ x - \frac{1}{3}csc^3\ x + C$$

Finalmente

$$\int \frac{cos^3\ x\ dx}{sen^4\ x} = csc\ x - \frac{1}{3}csc^3\ x + C$$

$g)\int \frac{sen^5\ y\ dy}{\sqrt{cos\ y}}$

$$\int \frac{sen^5\ y}{\sqrt{cos\ y}}dy = \int \frac{sen^4\ y\ sen\ y\ dy}{\sqrt{cos\ y}} = \int \frac{(sen^2\ y)^2 sen\ y\ dy}{\sqrt{cos\ y}}$$

Se sustituye $sen^2 y = 1 - cos^2 y$ en la integral:

$$\int \frac{(1 - cos^2\ y)^2 sen\ y\ dy}{\sqrt{cos\ y}}$$

Se realiza el cambio de variable, $v = cos\ y, dv = -sen\ y\ dy, -dv = sen\ y\ dy$

$$-\int \frac{(1 - v^2)^2 dv}{\sqrt{v}} = -\int \frac{(1 - 2v^2 + v^4)dv}{\sqrt{v}} = -\int \frac{dv}{\sqrt{v}} + 2\int v^{\frac{3}{2}}\,dv - \int v^{\frac{7}{2}}\,dv$$

$$= -2\sqrt{v} + \frac{4}{5}v^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{9}v^{\frac{9}{2}} + C$$

Al factorizar $-2\sqrt{v}$ de la expresión se obtiene:

$$= -2\sqrt{v}\left(1 - \frac{2}{5}v^2 + \frac{1}{9}v^4\right) + C, \quad \text{pero } v = \cos y$$

Finalmente,

$$\int \frac{\operatorname{sen}^5 y}{\sqrt{\cos y}} dy = -2\sqrt{\cos y}\left(1 - \frac{2}{5}\cos^2 y + \frac{1}{9}\cos^4 y\right) + C$$

Manos a la obra

Resuelve las siguientes integrales:

1. $\int \operatorname{sen}^3 4x \cos 4x \, dx$
2. $\int \cos^5 3x \operatorname{sen} 3x \, dx$
3. $\int \cos^3 x \operatorname{sen}^3 x \, dx$
4. $\int \operatorname{sen}^2 2x \cos^2 2x \, dx$
5. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x \, dx$
6. $\int \operatorname{sen}^3 2x \, dx$
7. $\int \operatorname{sen}^4 5x \, dx$
8. $\int \cos^2 \frac{x}{4} \, dx$
9. $\int \cos^5 x \, dx$
10. $\int \frac{\cos^3 x \, dx}{\operatorname{sen}^2 x}$

Integración por cambio de variable

Si $\sqrt[n]{ax+b}$ aparece en la integral, la sustitución $u = \sqrt[n]{ax+b}$ eliminará el radical.

$a)$ $\int \frac{dx}{x - \sqrt{x}}$

Sea $u = \sqrt{x}$, entonces $u^2 = x$ y $2u\, du = dx$. Por lo que:

$$\int \frac{dx}{x - \sqrt{x}} = \int \frac{2u}{u^2 - u} du = 2\int \frac{u}{u(u-1)} du = \int \frac{1}{u-1} du = 2ln|u-1| + C$$

Pero como $u = \sqrt{x}$ sustituimos para regresar a la variable original

$$= 2\, ln\left|\sqrt{x} - 1\right| + C$$

b) $\int x\sqrt[3]{x-4}\, dx$

Sea $u = \sqrt[3]{x-4}$, por lo que $u^3 = x - 4$ y $3u^2\, du = dx$.

Entonces

$$\int x\sqrt[3]{x-4}dx = \int (u^3+4)u\cdot(3u^2du) = 3\int(u^6+4u^3)du$$

$$= 3\left[\frac{u^7}{7}+u^4\right]+C$$

Pero como $u=\sqrt[3]{x-4}$ sustituimos para regresar a la variable original

$$= \frac{3}{7}(x-4)^{7/3}+3(x-4)^{4/3}+C$$

c) $\int x\sqrt[5]{(x+1)^2}dx.$

Sea $u=(x+1)^{1/5}$, de modo que $u^5=x+1$ y $5u^4\,du=dx$.

Entonces

$$\int x(x+1)^{2/5}\,dx = \int (u^5-1)u^2\cdot 5u^4du$$

$$= 5\int(u^{11}-u^6)\,du = \frac{5}{12}u^{12}-\frac{5}{7}u^7+C$$

Pero como $u=(x+1)^{1/5}$, sustituimos para regresar a la variable original

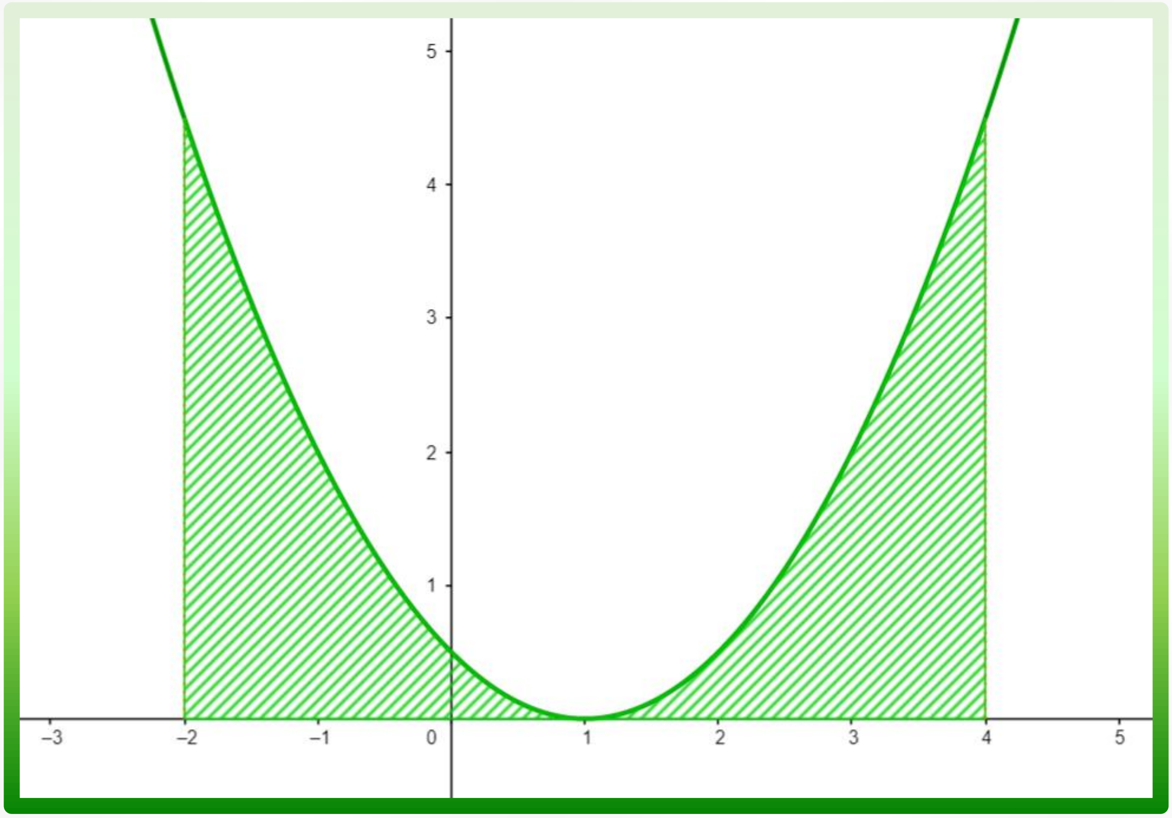
$$= \frac{5}{12}(x+1)^{12/5}-\frac{5}{7}(x+1)^{7/5}+C$$

Manos a la obra

Resuelve las siguientes integrales:

1. $\int x\sqrt{x-1}dx$
2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3x+2}}$
3. $\int \frac{dt}{\sqrt{t}+4}$
4. $\int x(2x+5)^{\frac{3}{2}}\,dx$
5. $\int t\sqrt[3]{t-1}dt$
6. $\int \frac{x^2+3x}{\sqrt{x+4}}dx$
7. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx$
8. $\int x(1-x)^{\frac{2}{3}}\,dx$

IV. CALCULAS ÁREA BAJO LA CURVA



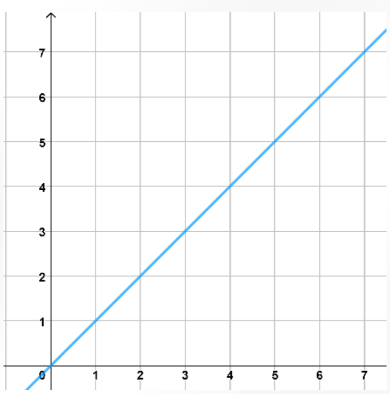
APRENDIZAJES ESPERADOS

- Calcula el área debajo de curvas conocidas, como gráficas de funciones lineales, cuadráticas y cubicas entre dos límites de integración.
- Reconoce el significado de la integral definida con el área bajo la curva.
- Visualiza la relación entre área e integral definida.

En el bloque I trabajamos sobre como aproximar el área de cualquier figura usando rectángulos o trapecios además observamos que entre más rectángulos usemos más exacta es el área aproximada al área real. Además, cerramos con la idea de que cuando el número de rectángulos tiende a infinito entonces tenemos un límite.
En este bloque retomaremos esa idea para tener un nuevo concepto de integral conocida como integral definida.

Valorando lo que sabes

1. Observa la siguiente gráfica dada por la función $y = x$.
Completa la tabla con el área bajo la recta que corresponda a cada intervalo dado



Intervalo	Área
0-1	
0-2	
0-3	
0-4	
0-5	
0-6	

¿Cómo cambia el área de un intervalo a otro?

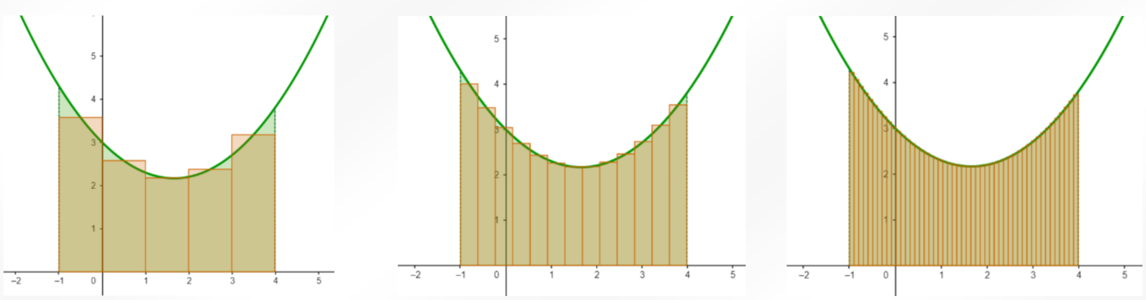
2. Completa la tabla con el área bajo la recta que corresponda a cada intervalo dado.

Intervalo	Área
0-1	
0-2	2
0-3	
…	…
0-17	
…	…
0-x	

¿Cómo realizaste el cálculo para el área del intervalo comprendido desde 0 hasta 17 y de 0 hasta x?

Integral definida

Si al aproximar un área a través de rectángulos de tal manera que aumente cada vez el número de estos, y sigan creciendo hasta que el número de rectángulos crezca indefinidamente, al ocurrir esto el intervalo de cada rectángulo tenderá a ser cero.
Ver figura



Entonces se tendrá el límite de la suma de Riemann y quedará expresada como:

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta x \cdot f_{x_k} = \int_a^b f(x)dx$$

Donde a y b son los límites de integración (el intervalo)

Teorema fundamental del Cálculo

El Teorema Fundamental del Cálculo dice que la derivada de la integral de una función es la misma función. Es decir, si una función $f(x)$ es continua en el intervalo [a,b] y x es cualquier punto dentro del intervalo, se puede definir $F(x)$ como:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

entonces:

$$F'(x) = f(x)$$

Así, la integral de $f(x)$ puede verse como la antiderivada o primitiva de esa función. La importancia de este Teorema, al que en ocasiones se denomina **Primer Teorema Fundamental del Cálculo**, reside en dos aspectos:

- Relaciona las dos principales nociones del cálculo, derivación e integración, demostrando que son procesos inversos. Esto significa que, si se integra una función continua, al derivarla después se recupera la función original.
- Proporciona un método simple para resolver muchas de las integrales definidas.

De este Teorema se desprende el **Segundo Teorema Fundamental del Cálculo,** conocido también como la Regla de Barrow que permite calcular fácilmente el valor de la integral definida a partir de cualquiera de las primitiva de la función. Esto es:

Dada una función $f(x)$ continua en todo el intervalo a, b si $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$, es decir:

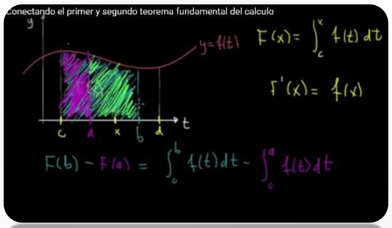
$$F'(x) = f(x)$$

Entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Este teorema nos da la posibilidad de calcular cualquier integral definida y por consiguiente el área bajo la curva de una función en un intervalo continuo.

Para tener una mejor comprensión de estos teoremas te presento un enlace a un video de Khan Academy.



Aplicando el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo evalúa las siguientes integrales.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

a) $\int_1^3 2xdx$

Primero encontramos la función primitiva F, es decir, integramos solo que no escribimos la constante de integración.

$$\int 2xdx = 2\frac{x^2}{2} = x^2$$

De acuerdo con el teorema ahora en la función primitiva que se obtuvo se sustituye el valor del límite superior (b) y después el límite inferior (a) y se restan los valores obtenidos.

De la integral se obtuvo que $F(x) = x^2$

Para esta integral $b = 3$ y $a = 1$

$F(3) = (3)^2 = 9$

$F(1) = (1)^2 = 1$

$F(3) - F(1) = 9 - 1 = 8$

$$\therefore \int_1^3 2xdx = 8$$

El proceso anterior se puede hacer con menos pasos como se verá en los siguientes ejemplos.

b) $\int_{-2}^4 (x^3 - 2)dx$

Integramos y seguidamente evaluamos

$$\int_{-2}^4 (x^3 - 2)dx = \left(\frac{x^4}{4} - 2x\right)\Bigg|_{-2}^{4} = \left(\frac{4^4}{4} - 2(4)\right) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - 2(-2)\right)$$

$$= (64 - 8) - (4 + 4) = 56 - 8 = 48$$

$$\therefore \int_2^4 (x^3 - 2)dx = 48$$

c) $\int_1^5 (4x+3)dx$

Integramos y seguidamente evaluamos

$$\int_1^5 (4x+3)dx = \left(\frac{4x^2}{2}+3x\right)\Bigg|_1^5 = (2(5)^2+3(5)) - (2(1)^2+3(1))$$

$$= (50+15) - (2+3) = 65 - 5 = 60$$

$$\therefore \int_1^5 (4x+3)dx = 60$$

d) $\int_1^8 \left(x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{3}}\right) dx$

$$\int_1^8 \left(x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{3}}\right) dx = \left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{7}x^{\frac{4}{3}}\right)\Bigg|_1^8 = \left(\frac{3}{4}\cdot 16 + \frac{3}{7}\cdot 128\right) - \left(\frac{3}{4}\cdot 1 + \frac{3}{7}\cdot 1\right)$$

$$= \left(12 + \frac{384}{7}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{7}\right) = \frac{468}{7} - \frac{33}{28} = \frac{1839}{28}$$

Así:

$$\int_1^8 \left(x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{3}}\right) dx = \frac{1839}{28} \approx 65.678$$

e) $\int_1^5 (6+e^{3x})dx$

Separamos en dos integrales y una de ellas se resolverá con la fórmula $\underline{\int e^v dv}$

$$\int_2^5 (6+e^{3x})dx = \left(6x + \frac{1}{3}e^{3x}\right)\Bigg|_2^5 = \left(6(5) + \frac{1}{3}e^{15}\right) - \left(6(2) + \frac{1}{3}e^{6}\right)$$

$$= 30 + \frac{1}{3}e^{15} - 12 - \frac{1}{3}e^{6} = 18 + \frac{1}{3}(e^{15} - e^{6})$$

Así:

$$\int_1^5 (6+e^{3x})dx = 18 + \frac{1}{3}(e^{15} - e^{6}) \approx 1\,089\,555.98$$

f) $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos \pi x dx$

Se resolverá con la fórmula $\underline{\int \cos v \, dv}$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \cos \pi x dx = -\frac{1}{\pi} sen\ \pi x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}\left(sen\ \frac{1}{2}\pi - sen\ 0\pi\right) = \frac{1}{\pi}(1-0) = \frac{1}{\pi}$$

Así:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \cos \pi x dx = \frac{1}{\pi} \approx 0.3183$$

En el ejemplo anterior es necesario que tu calculadora esté en modo radianes

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2\ x \cdot sen\ x\ dx =$

Se integra con la fórmula $\int v^n dv$

Por lo que: $v = cos\ x$ y $dv = -sen\ x\ dx$

Se integra y se sustituye

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2\ x \cdot sen\ x\ dx = -\frac{1}{3}cos^3 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}\left(cos^3\ \left(\frac{\pi}{2}\right) - cos^3\ (0)\right) = -\frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}$$

En el ejemplo anterior es necesario que tu calculadora esté en modo radianes

h) $\int_3^6 \frac{x+1}{x^2+2x-3}$

Se integra con la fórmula $\int \frac{dv}{v}$

Por lo que: $= x^2 + 2x - 3$ y $dv = (2x+2)dx = 2(x+1)dx$

Así:

$$\int_3^6 \frac{x+1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{2} ln|x^2+2x-3| \Big|_3^6 = \frac{1}{2}(ln|6^2+2(6)-3| - ln|3^2+2(3)-3|)$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 45 - ln 12) \approx 0.6608$$

Para saber más

Manos a la obra

Evalúa las siguientes integrales

1. $\int_{-1}^{3} 7dx$
2. $\int_{-2}^{0} \frac{1}{2}dx$
3. $\int_{0}^{4} 5xdx$
4. $\int_{2}^{4} x^3dx$
5. $\int_{1}^{8} 2x^{\frac{2}{3}}\,dx$
6. $\int_{0}^{1} \sqrt[5]{x}\,dx$
7. $\int_{-1}^{3} (5x^2-4)dx$
8. $\int_{0}^{3} (2x^3-4x+1)\,dx$
9. $\int_{-2}^{2} (2x-1)^2\,dx$
10. $\int_{1}^{6} \sqrt{x+3}dx$
11. $\int_{3}^{5} \frac{x-2}{x}dx$
12. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{2x+4}$
13. $\int_{1}^{2} \frac{xdx}{3x^2-4}$
14. $\int_{-2}^{2} x(3x^2-7)\,dx$
15. $\int_{3}^{5} e^{2x}\,dx$
16. $\int_{1}^{3} 3^x\,dx$
17. $\int_{0}^{\pi} \cos 5x\,dx$
18. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sen\ \frac{x}{2}dx$
19. $\int_{2}^{4} \frac{e^x}{e^x+4}$
20. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^2+1}$

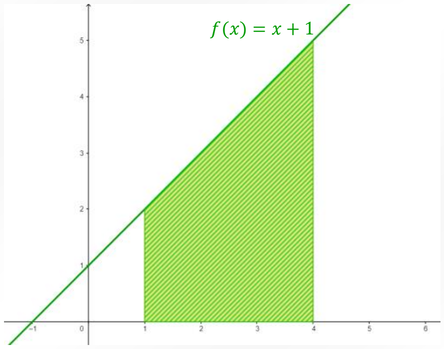
Evaluando tus aprendizajes

Área bajo la curva

La integral definida nos permite hallar el área bajo la curva en un intervalo dado

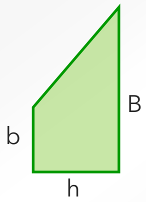
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Con el teorema anterior se calcula la acumulación para la función dada en el intervalo a, b, es decir, el área bajo la curva entre los limites inferior y superior.



$$\int_1^4 (x+1)dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_1^4 = \left(\frac{4^2}{2} + 4\right) - \left(\frac{1^2}{2} + 1\right) = 12 - \frac{3}{2} = \frac{21}{2} = 10.5\ u^2$$

Ahora calcularemos el área bajo la recta usando la fórmula de un trapecio, para el intervalo $[1, 4]$.



$$A = \frac{1}{2}(B + b)h$$

Calcularemos los valores de B, b y h

$$h = 4 - 1 = 3$$

Para hallar los valores de B y b sustituimos los limites superior e inferior respectivamente en la función $f(x) = x + 1$

$$B = f(4) = 4 + 1 = 5$$

$$b = f(1) = 1 + 1 = 2$$

Se puede verificar en la gráfica estos valores

Sustituyendo los valores en la fórmula

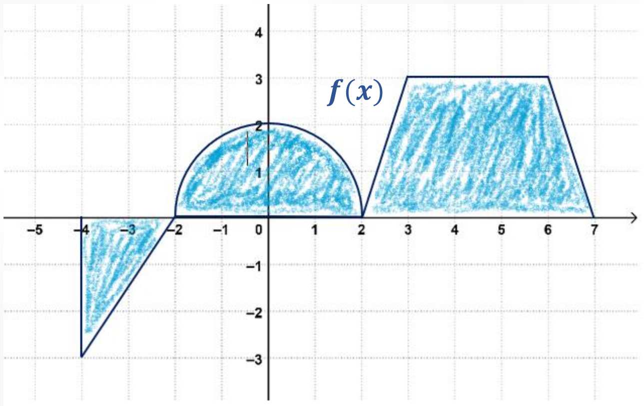
$$A = \frac{1}{2}(B + b)h = \frac{1}{2}(5 + 2)3 = \frac{1}{2}(21) = \frac{21}{2} = 10.5\ u^2$$

Como se observa el resultado es el mismo y se puede verificar que cumple para cualquier curva, por lo que podemos hacer uso de la integral definida para calcular el área.

Evaluar integrales definidas mediante fórmulas de áreas

En el bloque 1 se vio como calcular las áreas de figuras geométricas, en este momento se verá cómo obtener las integrales definidas dada la gráfica.

a) De acuerdo con la gráfica calcula las siguientes integrales definidas



a) $\int_{-4}^{-2} f(x)dx$

b) $\int_{-2}^{2} f(x)dx$

c) $\int_{2}^{7} f(x)dx$

Recordando que la integral definida nos da el área bajo la curva, calculamos el área de cada figura geométrica (triángulo, semicircunferencia y trapecio) para tener la integral definida.

a) Para el intervalo de -4 a -2 la figura es un triángulo

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(2)(3)}{2} = 3$$

Pero como el triángulo está debajo del eje X el valor será negativo.

Así:

$$\int_{-4}^{-2} f(x)dx = -3$$

b) Para el intervalo de -2 a 2 la figura es una semicircunferencia

$$A = \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi(2)^2}{2} = 2\pi$$

Así:

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2\pi$$

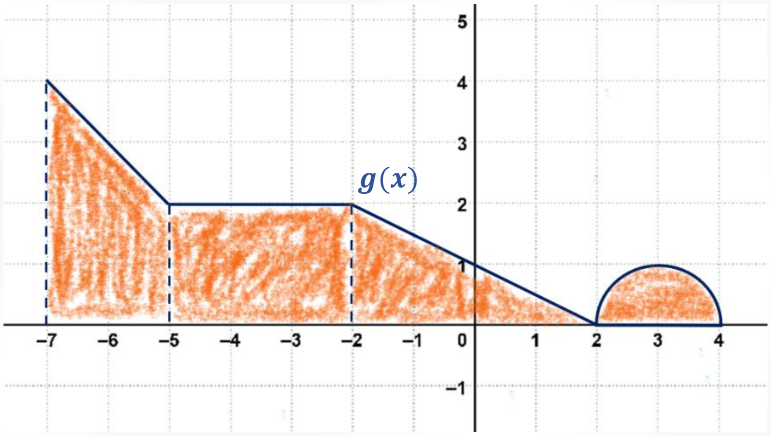
c) Para el intervalo de 2 a 7 la figura es un trapecio

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(5 + 3)(3)}{2} = 12$$

Así:

$$\int_{2}^{7} f(x)dx = 12$$

b) De acuerdo con la gráfica calcula las siguientes integrales definidas



a) $\int_{-7}^{-5} g(x)dx$

b) $\int_{-5}^{-2} g(x)dx$

c) $\int_{-2}^{2} g(x)dx$

d) $\int_{2}^{4} g(x)dx$

a) Para el intervalo de -7 a -5 la figura es un trapecio

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(4+2)(2)}{2} = 6$$

Así:

$$\int_{-7}^{-5} g(x)dx = 6$$

b) Para el intervalo de -5 a -2 la figura es un rectángulo

$$A = b \cdot h = (3)(2) = 6$$

Así:

$$\int_{-5}^{-2} g(x)dx = 6$$

c) Para el intervalo de -2 a 2 la figura es un triángulo

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(4)(2)}{2} = 4$$

Pero como el triángulo está debajo del eje X el valor será negativo.

Así:

$$\int_{-2}^{2} g(x)dx = 4$$

d) Para el intervalo de -2 a 2 la figura es una semicircunferencia

$$A = \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi(1)^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

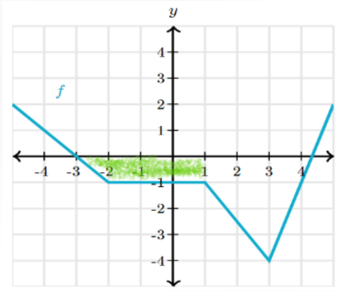
Así:

$$\int_{2}^{4} g(x)dx = 2\pi$$

Para saber más

Manos a la obra

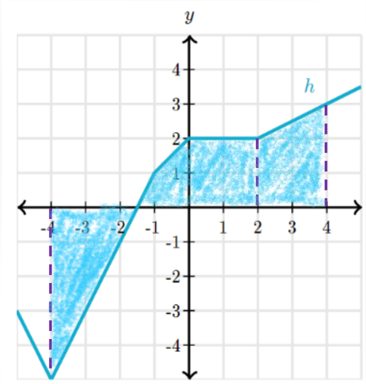
1. De acuerdo con la gráfica calcula las siguientes integrales definidas



a) $\int_{-3}^{-2} f(x)dx$

b) $\int_{-2}^{1} f(x)dx$

2. De acuerdo con la gráfica calcula las siguientes integrales definidas



a) $\int_{-4}^{-1.5} h(x)dx$

b) $\int_{-1}^{0} h(x)dx$

c) $\int_{0}^{2} h(x)dx$

d) $\int_{2}^{4} h(x)dx$

Calculo de área bajo la curva

Vamos a aplicar la integral definida para calcular el área bajo la curva de cualquier función integrable en el intervalo $[a, b]$.Sin embargo es importante tomar en cuenta las siguientes consideraciones para que el área sea positiva.

Consideraciones:

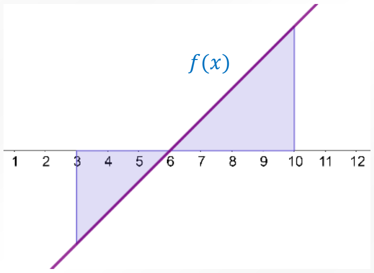
- En un intervalo donde la gráfica está debajo del eje X entonces el valor de la integral será negativo.
- Si en el intervalo de manera parcial la gráfica está debajo del eje X, se tendrán que resolver dos integrales, en donde el valor donde corta al Eje X será el límite superior de la primera integral y el límite inferior de la segunda derivada.

Se ejemplifica el segundo punto para una mejor comprensión.

Determine el área bajo la curva de

$$\int_{3}^{10} (x-6)dx$$

Como se observa en el intervalo [3,10] una parte de la gráfica esta debajo del eje X por lo tanto se tendrán dos integrales, la primera en el intervalo de [3, 6] con signo negativo y la segunda integral en el intervalo [6, 10] con signo positivo.



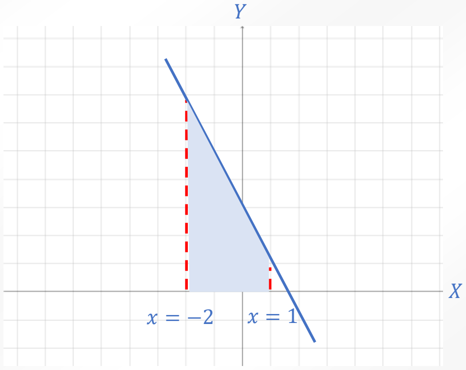
Por lo que

$$\int_{3}^{10} (x-6)dx = -\int_{3}^{6} (x-6)dx + \int_{6}^{10} (x-6)dx$$

Ahora calculemos el área bajo la curva

a) Obtén el área limitada por la recta $y = -2x + 3$ desde $x = -2$ hasta $x = 1$

Primero graficamos la recta limitadas por $x = -2$ y $x = 1$



$$Área = \int_{-2}^{1} f(x)dx$$

$$Área = \int_{-2}^{1} (-2x+3)dx = (-x^2+3x)\Big|_{-2}^{1}$$

$$Área = [-(1)^2 + 3(1)] - [-(-2)^2 + 3(-2)]$$

$$= 2 - (-10) = 12u^2$$

$$A = 12u^2$$

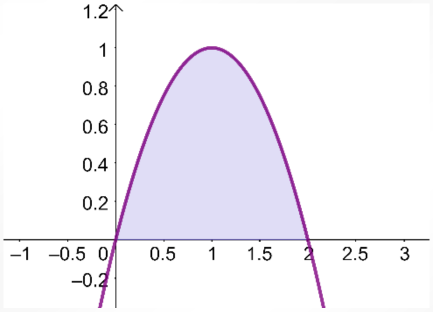
Al tratarse de un área se usa u^2 que indica unidades cuadradas (como cm^2, m^2, etc.)

b) Encuentra el área comprendida entre la curva $y = 2x - x^2$ y el eje X

Se buscan los puntos de intersección de la curva con el eje X,

$2x - x^2 = 0$, factorizando $x(2 - x) = 0$

donde $x = 0, \; x = 2$



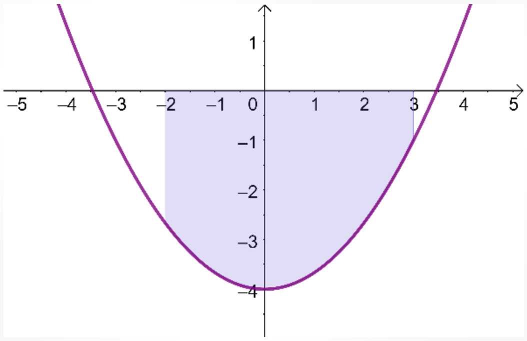
$$Área = \int_0^2 (2x - x^2)dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2$$

$$Área = \left[(2)^2 - \frac{(2)^3}{3}\right] - \left[(0)^2 - \frac{(0)^3}{3}\right] = 4 - \frac{8}{3}$$

$$A = \frac{4}{3}u^2$$

c) Encuentra el área acotada por $y = \frac{x^2}{3} - 4$, el eje x, $x = -2$ y $x = 3$.

Primero graficamos la parábola limitadas por $x = -2$ y $x = 3$

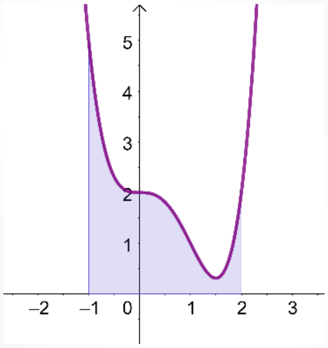


Como la curva está debajo del eje X para el intervalo se escribe el signo menos antes de la integral.

$$A = -\int_{-2}^{3}\left(\frac{x^2}{3} - 4\right)dx = \int_{-2}^{3}\left(-\frac{x^2}{3} + 4\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{9} + 4x\right]_{-2}^{3} = \left(-\frac{27}{9} + 12\right) - \left(\frac{8}{9} - 8\right) = \frac{145}{9} \approx 16.11u^2$$

d) Encuentra el área comprendida entre $y = x^4 - 2x^3 + 2$, el eje X y entre $x = -1$ y $x = 2$.

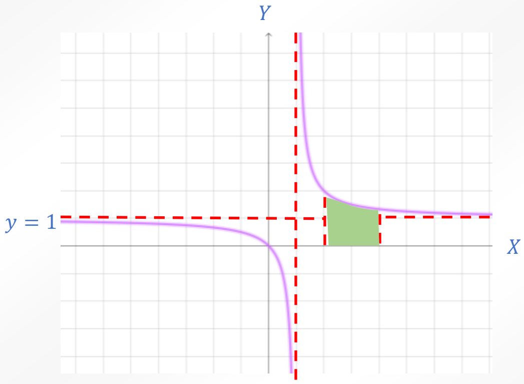


$$A = \int_{-1}^{2} (x^4 - 2x^3 + 2)dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{32}{5} - \frac{16}{2} + 4\right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{51}{10} =$$

$$A = 5.1u^2$$

e) Determina el área limitada por el eje X, la curva $f(x) = \frac{x}{x-1}$ y las rectas $x = 2$ y $x = 4$



$$Área = \int_{2}^{4} \frac{x}{x-1} dx = [x + ln(x-1)]\Big|_{2}^{4}$$

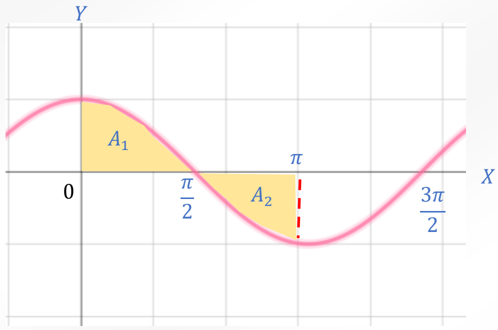
$$= [4 + ln(4-1)] - [2 + ln(2-1)]$$

$$= 2 + ln(3) =$$

$$A = 3.098u^2$$

f) Encuentra el área limitada por el eje X, la función $f(x) = \cos x$ y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$

Se traza la gráfica de la función $f(x) = \cos x$



Parte del área sombreada queda por debajo del eje X, así que se multiplica por -1

$$Área_T = A_1 - A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\, dx$$

$$= sen\, x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - sen\, x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \left[sen \frac{\pi}{2} - sen 0\right] - \left[sen\, \pi - sen\, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= (1 - 0) - \big(0 - (-1)\big) = 1 + 1 = 2\, u^2$$

Área entre dos funciones

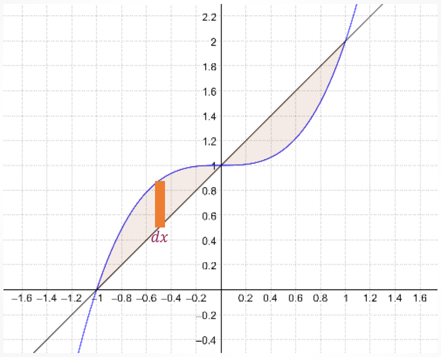
Cuando se busca el área limitada entre dos funciones se puede presentar dos situaciones

i. Que una curva esté en todo momento sobre la otra, en este caso se integrará con respecto a la variable x.
ii. Qué una curva no esté en todo momento sobre la otra curva, pero sí estará en todo momento a la derecha de la otra curva, en este caso conviene más integrar con respecto a la variable y, por tanto, la ecuación debe de quedar en función de y.

Realicemos los siguientes ejemplos donde se presentan los dos casos.

a) Determina el área limitada entre las curvas $y = x^3 + 1$ y $x - y + 1 = 0$

Primero trazamos la gráfica de ambas funciones



Podemos observar que para el intervalo $[-1,0]$ la curva (y_1) está arriba y la recta (y_2) abajo y para el intervalo $[0,1]$ la recta está arriba y la curva abajo. Y también para el intervalo $[-1,0]$ la curva (y_1) está a la izquierda y la recta (y_2) está a la derecha y para el intervalo $[0,1]$ la recta está a la izquierda y la curva a la derecha.
Ante esta situación se puede aplicar cualquiera de los dos casos.
Aquí se resolverá con base a la variable x, es decir, usando rectángulos verticales con base dx. Esto implica que la altura del rectángulo es y

Ahora se buscan los puntos de intersección de ambas curvas igualando las funciones:

$$x^3 + 1 = x + 1$$

$$x^3 - x = 0$$

$$x(x^2 - 1) = 0$$

$$x(x-1)(x+1) = 0$$

Se iguala a cero cada factor y se despeja

$$x = 0,\ x = 1 \text{ y } x = -1$$

Se realizarán dos integrales una para cada intervalo

$$\text{Área} = \int_{-1}^{0} (y_1 - y_2)dx + \int_{0}^{1} (y_2 - y_1)dx \ \text{ siendo } \ y_1 = x^3 + 1 \ \text{ y } \ y_2 = x + 1$$

$$= \int_{-1}^{0} [(x^3 + 1) - (x + 1)]dx + \int_{0}^{1} [(x + 1) - (x^3 + 1)]dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)dx$$

Pero

$$\int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx = -\int_{0}^{1} (x^3 - x)dx = \int_{0}^{1} (x - x^3)dx$$

entonces

$$\text{Área} = \int_{1}^{0} (x - x^3)dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)dx = 2\int_{0}^{1} (x - x^3)dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= 2\left[\frac{(1)^2}{2} - \frac{(1)^4}{4}\right]$$

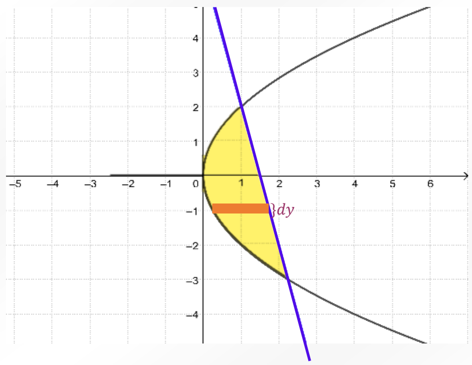
$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}u^2$$

Por lo tanto, el área comprendida entre las curvas es

$$A = \frac{1}{2}u^2$$

b) Obtén el área limitada por las curvas $y^2 = 4x, 4x + y - 6 = 0$

Trazamos la gráfica de ambas funciones



En este caso conviene más trazar rectángulos horizontales e integrar en función de y, porque en todo momento la recta está a la derecha de la parábola, es decir, se eligen rectángulos horizontales de base dy, por lo que la altura del rectángulo será x.

Se buscan las intersecciones de las curvas igualando los despejes en x,

$$\frac{y^2}{4} = \frac{6-y}{4}$$

$$y^2 + y - 6 = 0$$

$$(y+3)(y-2) = 0$$

Se iguala a cero cada factor y se despeja

$$y = -3; \quad y = 2$$

$$Área = \int_{-3}^{2} [x_1 - x_2]dx \quad \text{siendo } x_1 = \frac{6-y}{4} \text{ y } x_2 = \frac{y^2}{4}$$

$$= \int_{-3}^{2} \left(\frac{6-y}{4} - \frac{y^2}{4}\right) dy$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-3}^{2} (6 - y - y^2) dy$$

$$= \frac{1}{4}\left[6y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_{-3}^{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(6(2) - \frac{(2)^2}{2} - \frac{(2)^3}{3}\right) - \left(6(-3) - \frac{(-3)^2}{2} - \frac{(-3)^3}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[12 - 2 - \frac{8}{3} + 18 + \frac{9}{2} - \frac{27}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{125}{6}\right)$$

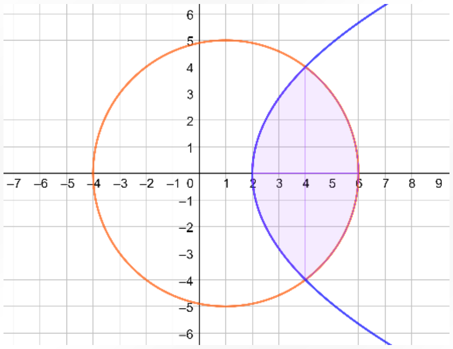
$$= \frac{125}{6}u^2$$

Finalmente, tenemos que el área comprendida por las curvas es

$$A = \frac{125}{6}u^2$$

c) Encuentra el área limitada por las curvas $x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$ y $y^2 - 8x + 16 = 0$

Trazamos la gráfica de ambas funciones



En este caso nuevamente conviene trazar rectángulos horizontales e integrar en función de y, porque en todo momento la circunferencia está a la derecha de la parábola, es decir, se eligen rectángulos horizontales de base dy, por lo que la altura del rectángulo será x.

Se resuelve el sistema de ecuaciones entre las dos curvas para obtener los puntos de intersección

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0 \\ \quad y^2 - 8x + 16 = 0 \end{cases}$$

Al multiplicar por -1 la segunda ecuación y sumar con la primera, se obtiene,

$$x^2 + 6x - 40 = 0 \ \rightarrow \ (x + 10)(x - 4) = 0 \ \rightarrow \ x = -10; \ x = 4$$

Se sustituye el valor de $x = 4$ en la ecuación de la parábola,

$$y^2 - 8(4) + 16 = 0$$
$$y^2 - 16 = 0$$
$$y = \pm 4$$

Por consiguiente, los puntos de intersección son los puntos $(4,4)\ y\ (4,-4)$ y el área determinada por:

$$Área = \int_{-4}^{4} (x_2 - x_1)dx$$

Se despeja x en ambas ecuaciones:

$$x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 24 - y^2 + 1$$

$$(x-1)^2 = 25 - y^2$$

$$x - 1 = \sqrt{25 - y^2}$$

$$x = \sqrt{25 - y^2} + 1$$

Al final se sustituyen en la fórmula del área:

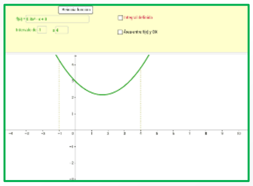
$$A = \int_{-4}^{4} \left[\left(\sqrt{25 - y^2} + 1\right) - \left(\frac{y^2 + 16}{8}\right)\right] dy = \int_{-4}^{4} \left(\sqrt{25 - y^2} - \frac{y^2}{8} - 1\right) dy$$

$$= \left[\frac{y}{2}\sqrt{25 - y^2} + \frac{25}{2} arc\ sen \frac{y}{5} - \frac{y^3}{24} - y\right]_{-4}^{4}$$

$$= \left[\frac{4}{2}\sqrt{25 - 4^2} + \frac{25}{2} arc\ sen\left(\frac{4}{5}\right) - \frac{4^3}{24} - 4\right] - \left[\frac{-4}{2}\sqrt{25(-4)^2} + \frac{25}{2} arc\ sen\left(\frac{-4}{5}\right) - \frac{(-4)^3}{24} - (-4)\right]$$

$$= [6 + 11.59 - 2.66 - 4] - [-6 - 11.59 + 2.66 + 4] = 21.86u^2$$

Para saber más



Manos a la obra

a) Determina las áreas comprendidas entre las curvas y las rectas dadas.

1) $f(x) = 2x + 2, x = 1, x = 4$

2) $f(x) = x^2, x = 0, x = 4$

3) $f(x) = x^3, x = 1, x = 4$

4) $f(x) = 4 - x^2, x = -2, x = 2$

5) $f(x) = \sqrt{x+3}, x = -3, x = 1$

6) $f(x) = sen\, x, x = 0, x = \dfrac{\pi}{2}$

7) $f(x) = x^2 - 2x + 1, x = -1, x = 3$

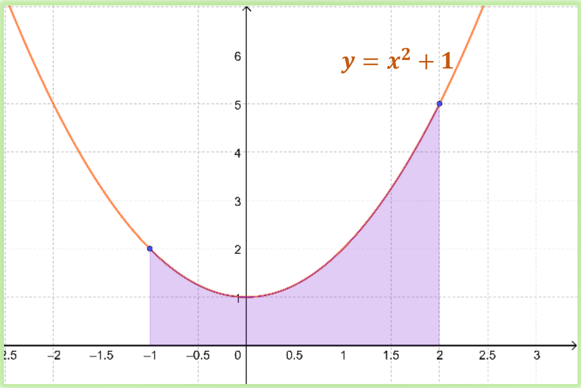
8) $y = \sqrt{x}, x = 1, x = 4$

9) $y = \dfrac{2}{x+1}, x = 0, x = 3$

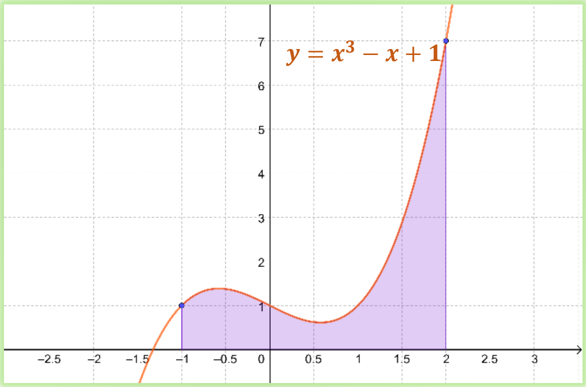
10) $y = e^{2x}, x = 0, x = \dfrac{1}{2}$

b) Evalúa una integral (o integrales) para el área de la región sombreada que se indica.

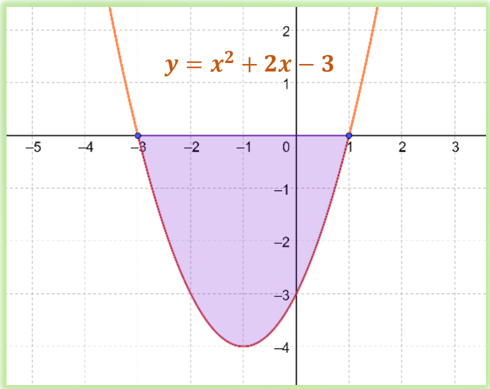
1.



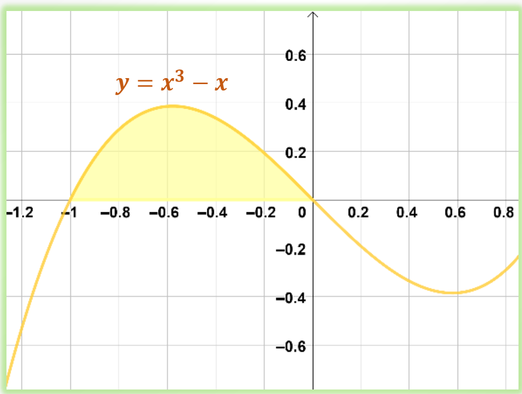
2.



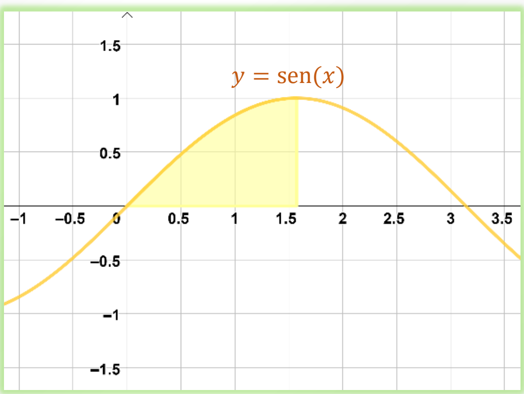
3.



4.

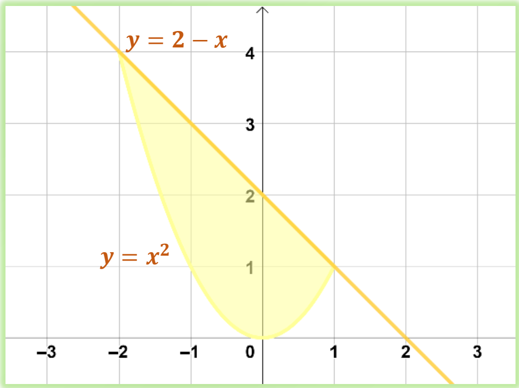


5.

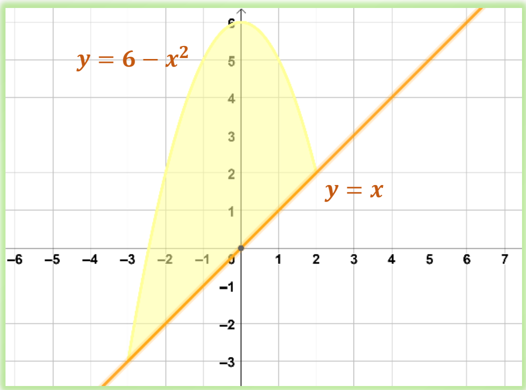


Intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

6.



7.



Evaluando tus aprendizajes

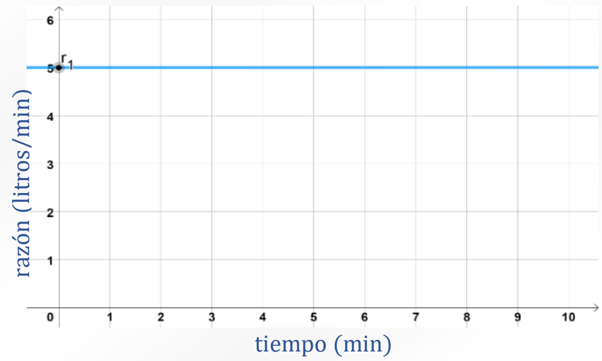
Interpretación del área (acumulación)

Los problemas de acumulación (o de cambio) son problemas verbales donde la razón de cambio de una cantidad está dada y se nos pide calcular el valor de la cantidad acumulada a lo largo del tiempo. Estos problemas se resuelven por medio de integrales definidas.

Digamos que un tanque se llena de agua a una razón constante (gasto) de 5 l/min (litros por minuto) durante 6 $min.$ Podemos encontrar el volumen de agua en litros (l) al multiplicar el tiempo y la razón:

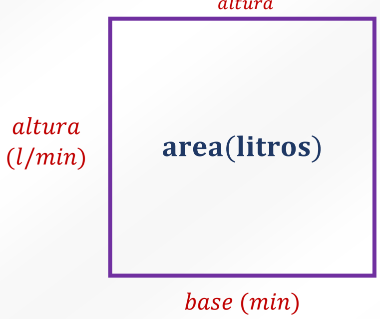
$$\begin{aligned} Volumen = &\ tiempo \times razón \\ &= 6min \cdot 5\frac{l}{min} \\ &= 30\frac{\cancel{min}\cdot l}{\cancel{min}} \\ &= 30\ l \end{aligned}$$

Ahora considera este caso gráficamente. La razón puede representarse por la función constante $r_1(t) = 5$:

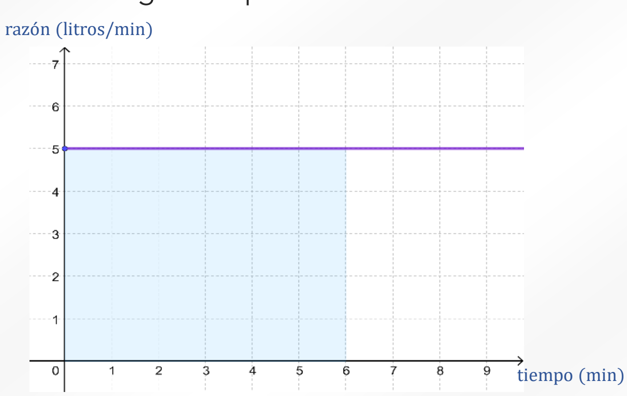


Cada unidad horizontal en esta gráfica se mide en minutos y cada unidad vertical se mide en litros por minuto, por lo que el área de cada unidad cuadrada se mide en litros:

$$\underbrace{min}_{base} \cdot \underbrace{\frac{l}{min}}_{altura} = \underbrace{l}_{área}$$

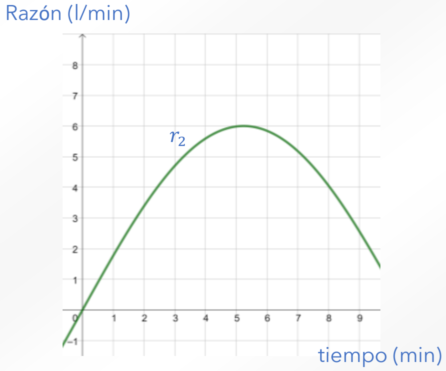


Más aún, el área del rectángulo acotado por la gráfica de r_1 y el eje horizontal entre $t = 0$ y $t = 6$ nos da el volumen del agua después de 6 minutos:



Ahora se tiene otro tanque que se llena, pero esta vez la razón no es constante:

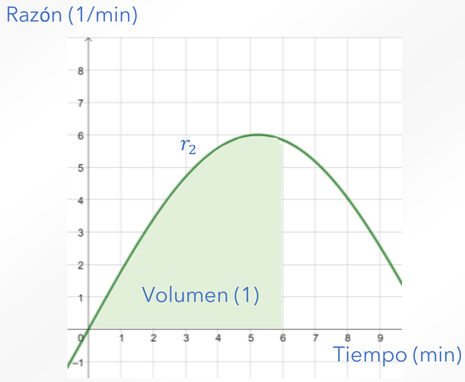
$$r_2(t) = 6\sin(0.3t)$$



¿Cómo podemos determinar el volumen de agua en este tanque después de 6 minutos? Para lograrlo, podemos usar la integral definida.

$$\int_0^6 r_2(t)dt$$

Esto significa que el volumen exacto de agua después de 6 minutos es igual al área encerrada por la gráfica de r_2 y en el eje horizontal entre $t = 0$ y $t = 6$.



Así el cálculo integral nos permite encontrar el volumen total después de 6minutos.

$$\int_0^6 r_2(t)\,dt = \int_0^6 6\sin(0.3t)\,dt$$

$$= -\frac{6}{0.3}(\cos(0.3t))\Big|_0^6$$

$$= -\frac{6}{0.3}[\cos(1.8) - \cos(0)]$$

$$= 24.5\ l$$

Por lo tanto

$$\int_0^6 r_2(t)\,dt = 24.5\ litros$$

En el ejemplo de vimos, teníamos una función que describe una razón. En nuestro caso, era la razón de volumen entre tiempo. **La integral definida de esa función nos dio la acumulación de volumen** – aquella cantidad cuya razón fue dada.

Otra característica importante aquí fue el intervalo de tiempo de la integral definida, en nuestro caso, el intervalo de tiempo fue el comienzo ($t = 0$) y 6 minutos después de este $t = 6$, por lo **que la integral definida nos dio el cambio neto** en la cantidad de agua en el tanque entre $t = 0$ y $t = 6$.
Estas son dos formas comunes de pensar sobre las integrales definidas: describen la acumulación de una cantidad, por lo que la integral definida completa nos da el cambio neto en esa cantidad.

Usando el ejemplo anterior, observa cómo no se nos dijo si había algo de agua en el tanque antes de $t = 0$. Si el taque estuviera vacío, entonces

$$\int_0^6 r_2(t)\,dt \approx 24.5\,l$$

Es realmente la cantidad de agua en el tanque después de 6 minutos, pero su el tanque ya contenía, digamos, 8 litros de agua, entonces el volumen real del agua en el tanque después de 6 minutos es:

$$\underbrace{8}_{\text{Volumen en } t\,=\,0} \quad + \quad \overbrace{\int_0^6 r_2(t)\,dt}^{\text{Cambio en el volumen de } t\,=\,0 \text{ a } t\,=\,6}$$

Que es aproximadamente $8 + 24.5 = 31.5\,l$.

***Recuerda**: la integral definida siempre nos da el cambio neto en una cantidad, no el valor real de esa cantidad. Para encontrar el valor real, necesitamos sumar una condición inicial a la integral definida.*

La integral definida puede usarse para expresar información sobre la acumulación y el cambio neto en contextos aplicados. Analiza los siguientes ejemplos.

a) La temperatura de una sopa crece a una razón de $r(t) = 30e^{-0.3t}$ grados Celsius por minuto (donde t es el tiempo en minutos). En el tiempo $t = 0$, la temperatura de la sopa es de 23 grados Celsius.

i) Encontrar la cantidad por la cual la temperatura aumentó entre $t = 0$ y $t = 5$ minutos.
ii) ¿Cuál es la temperatura de la sopa a los $t = 5$ minutos?

Este es un problema verbal de *acumulación* (o cambio neto). Podemos decir que lo es porque se nos da una función que modela la razón de cambio de una cantidad y que se nos pregunta sobre el *cambio* en esa cantidad en un intervalo de tiempo.

Para cualquier cantidad cuya razón está dada por la función r, la integral definida $\int_a^b r(t)dt$ describe la cantidad por la cual esta cambió entre $t = a$ y $t = b$.

i) Así, nuestro caso, la cantidad por la cual la temperatura creció entre $t = 0$ y $t = 5$ minutos está dada por:

$$\int_0^5 r(t)\,dt = \int_0^5 30e^{-0.3t}\,dt$$

$$= -\frac{30}{0.3}e^{-0.3t}\Big|_0^5$$

$$= -100[e^{-1.5} - e^0] \approx 77.7$$

Por lo tanto, la temperatura creció entre t=0 y t=5 minutos

77.7 grados Celcius

ii) Ahora calcularemos la temperatura de la sopa a los $t = 5$ minutos
Recuerda que se nos dijo que la temperatura de la sopa al tiempo $t = 0$ era de 23 grados Celsius. Si sumamos esta cantidad al cambio en la temperatura entre $t = 0$ y $t = 5$, obtenemos la temperatura en $t = 5$:

$$\underbrace{23}_{\text{Temperatura en } t\,=\,0} \qquad + \qquad \overbrace{\int_0^5 r(t)\,dt}^{\text{Cambio en la temperatura entre } t\,=\,0 \text{ y } t\,=\,5}$$

como ya calculamos, $\int_a^b r(t)dt$ podemos decir que a los $t = 5$ minutos, la temperatura fue de:

23+77.7=100.7 grados Celsius. Entonces la sopa está ¡hirviendo!

b) Un automóvil desacelera a una razón de $2t + 50$ centímetros por segundo (donde t es el tiempo en segundos).

Entre $t = 2$ y $t = 10$ ¿a cuántos centímetros por segundo desacelera el auto?

Calcularemos la integral definida con limites 5 y 15 para determinar la desaceleración en ese intervalo de tiempo.

$$\int_2^{10}(2t + 50)dt = (t^2 + 50t)\Big|_2^{10} = \left(10^2 + 50(10)\right) - \left(2^2 + 50(2)\right) = 600 - 104 = 496$$

Desacelera a razón de 496 cm/s

Manos a la obra

1. El número total de fotos que Marco Juárez sube a un sitio web crece a una razón de $r(t) = 10 - t$ fotos por semana (donde t es el tiempo en semanas). Al tiempo $t = 2$ semanas, Marco ha subido 20 fotos. ¿Cuántas fotos subió Marco entre las semanas 2 y 6?

2. La profundidad del agua en el bebedero para pájaros en un parque cambia a una razón de $r(t) = 0.25t - 0$ milímetros por hora (donde t es el tiempo en horas). Al tiempo t=0, la profundidad del agua es de 30 milímetros. ¿Cuál es la profundidad del agua a las t=2 horas?

3. La población de un pueblo crece a una razón de $r(t) = t^2 + 4t$, personas por año (donde t es el tiempo en años). Al tiempo t=2 la población del pueblo es de 2500 personas. ¿Por cuánto creció la población entre los años 2 y 10? ¿cuál es la población a los 10 años?

4. La columna de aire bajo un puente (la distancia del punto más bajo del puente a la superficie del agua) cambia a una razón de $r(t) = 0.6\, sen\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ metros por hora (donde t es el tiempo en horas). Al tiempo t=12 la columna de aire mide 62 metros. ¿Cuánto mide la columna a las t=15 horas?

Para saber más

Evaluando tus aprendizajes