CECyTE Campeche

Trabajos Colegiados Estatales Virtuales

CÁLCULO DIFERENCIAL

Gabriel Enrique Peralta Horta
Silvia Eduviges Villegas Ávalos
Helbert Andrei Guzmán Cámara

CECyTE Campeche

PRESENTACIÓN

Querido alumno:

En la familia CECyTEC tenemos un gran compromiso, la enorme tarea de que ustedes, nuestros alumnos, logren sus metas y sus objetivos. Con estos libros de trabajo estamos dándoles las herramientas que les permitan desarrollar sus conocimientos y habilidades para tener un buen desempeño académico.

Dedícate tiempo de manera inteligente para desarrollar tus habilidades y destrezas. Ten muy claras tus metas. Recuerda que solo con educación podemos construir un futuro prometedor, un mejor país, un mejor estado, un mejor municipio y una mejor familia.

Aprende a soñar. Lucha por tus sueños. Te auguro que serás siempre un triunfador.

¡Estás a muy poco de lograr el éxito!

Mtra. Margarita Nelly Duarte Quijano

Directora General del CECyTEC

Libro de Trabajo
Febrero - Julio 2022

Cálculo Diferencial

Segundo Parcial

Plantel: _____

Nombre del Alumno: _____

Carrera: _____

Semestre: _____ Grupo: _____

Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Campeche

Eje: Pensamiento y lenguaje variacional.

Componentes: Cambio y predicción: elementos del cálculo.

Contenido central: Uso de las derivadas en diversas situaciones contextuales. Tratamiento intuitivo: numérico, visual y algebraico de los límites. Tratamiento del cambio y la relación: estrategias variacionales.

Contenidos específicos:

- ¿Qué tipo de procesos se precisan para tratar con el cambio y la optimización, sus propiedades, sus relaciones y sus representaciones?
- ¿Por qué las medidas del cambio resultan útiles para el tratamiento de diferentes situaciones contextuales?
- Construyendo modelos predictivos de fenómenos de cambio continúo y cambio discreto.
- Calcular derivadas de funciones mediante técnicas diversas.

Aprendizajes esperados:

AE1.- Encuentra en forma aproximada los máximos y mínimos de una función.

AE2.- Determina algebraica y visualmente las asíntotas de algunas funciones racionales básicas.

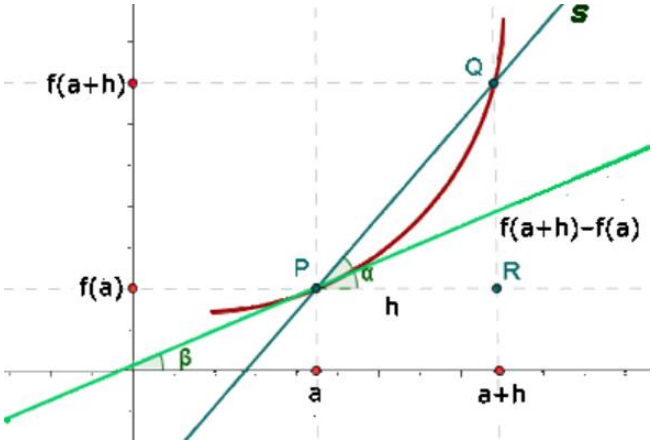
AE3.- Utiliza procesos para la derivación y representan a los objetos derivada y derivada sucesiva como medios adecuados para la predicción local.

Apertura

Los siguientes son los cuatro problemas cardinales que impulsaron el desarrollo del cálculo a lo largo del tiempo:

1. El problema del área bajo la curva.
2. El problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto dado.
3. El problema de establecer la velocidad instantánea de un objeto en movimiento. Por ejemplo, si dejamos caer una pelota desde lo alto de una torre, a 200 metros sobre el suelo, ¿cómo se puede determinar su velocidad a los tres segundos?
4. El problema de los máximos y los mínimos. En general, en todos los campos de la actividad humana siempre se busca la optimización de los recursos. Por ejemplo, las empresas buscan minimizar los costos de producción y maximizar las ganancias; en física, al lanzar un objeto verticalmente hacia arriba con una velocidad dada se desea conocer el tiempo que tarda en alcanzar su altura máxima; en el campo de diseño industrial para optimizar dimensiones, como cuando se desea obtener el tamaño óptimo de un refrigerador al que se le debe reducir el volumen exterior para maximizar su espacio interior o también al proyectar un envase se busca que sus dimensiones sean las que minimicen la cantidad de material empleado en su fabricación.

Newton desarrolló primero el cálculo diferencial y posteriormente el integral. El cálculo diferencial se refiere a las propiedades y aplicaciones de la derivada de una función. El proceso de hallar esa derivada se llama derivación o diferenciación, y consiste en hallar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto determinado.



Actividad diagnóstica

1. **Transforma una expresión con exponentes Negativos en una expresión equivalente con exponentes positivos (ley del exponente negativo):**

a) $x^{-4} =$	c) $x^{-1} =$
b) $x^{-2} =$	d) $\frac{2}{7}x^{-5} =$

2. **Escribe en forma de potencia los siguientes radicales (ley de radicales):**

a) $\sqrt{x} =$	c) $\sqrt[4]{x} =$
b) $\sqrt[8]{x^5} =$	d) $\sqrt{x^3} =$

3. **Escribe como radical las potencias siguientes (ley de exponente fraccionario):**

a) $x^{1/3} =$	c) $x^{2/3} =$
b) $x^{1/5} =$	d) $x^{-1/2} =$

4. **Factoriza las expresiones algebraicas:**

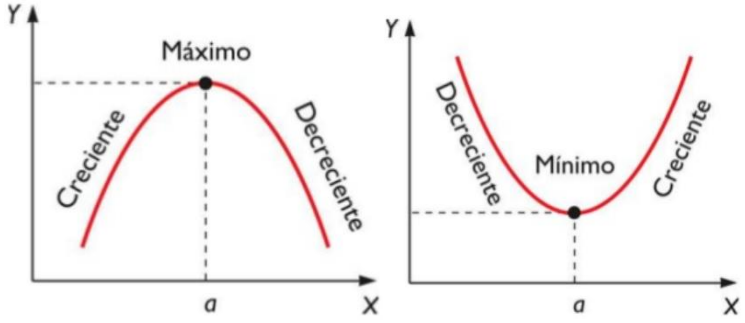
a) $x^2 - 2x - 8 =$	c) $4x^2 - 10x =$
b) $x^2 - 16 =$	d) $x^2 - 7x + 12 =$

Autoevalúate; para ello, escribe una (✓) en la celda que consideres que refleja mejor los conocimientos previos que posees.

Indicador de desempeño	Nivel			
	Excelente	Bueno	Elemental	Insuficiente
Utilizo la ley del exponente negativo.				
Utilizo la ley de radicales.				
Utilizo la ley de exponentes fraccionarios.				
Factorizo expresiones algebraicas.				

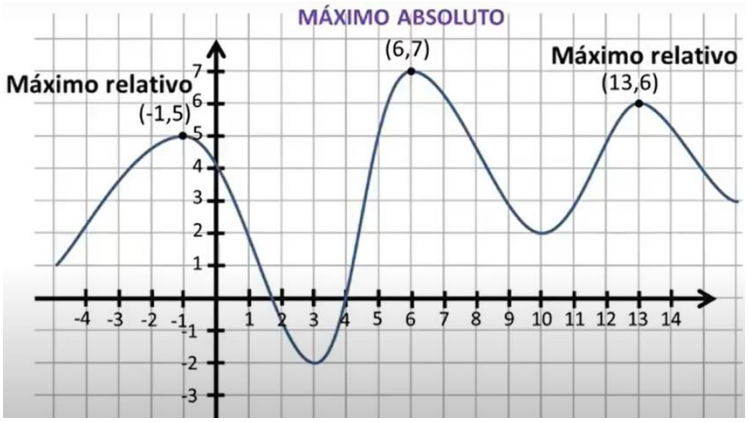
1. Máximos y mínimos de una función

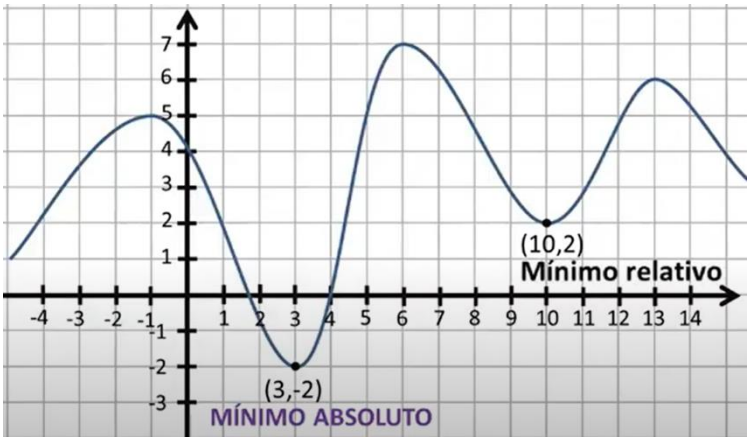
Los **máximos y mínimos en una función** $f(x)$ son los valores más grandes (máximos) o más pequeños (mínimos) que toma la función, ya sea en una región (extremos relativos) o en todo su dominio (extremos absolutos).



El **máximo relativo de una función** $f(x)$ es un punto de la función donde ésta cambia de creciente a decreciente, es decir, aquellos puntos altos de la gráfica.

El **máximo absoluto de la función** $f(x)$ es el valor más grande en todo el dominio.





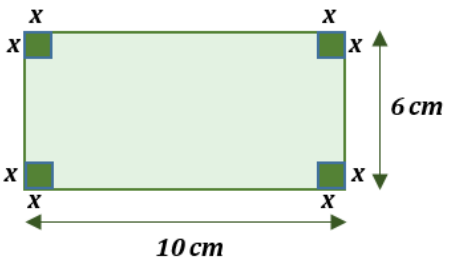
El **mínimo relativo de una función** $f(x)$ es un punto de la función donde ésta cambia de decreciente a creciente, es decir, aquellos puntos bajos de la gráfica.

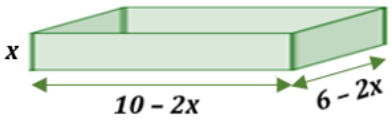
El **mínimo absoluto de la función** $f(x)$ es el valor más pequeño en todo el dominio.

Ejemplo. Un estudiante tiene láminas rectangulares de 10 x 6 cm y requiere construir cajas cortando de las esquinas cuadradas de arista x. ¿Cuál es el volumen máximo que pueden contener las cajas?

Solución

- Se realiza un bosquejo de la lámina para marcar los cuadrados que se recortarán.





- Se representa la función como el producto de la longitud de sus lados.

Se recortan dos $\boldsymbol{x}$ de cada lado:

Largo de la caja = $\mathbf{10 - 2x}$

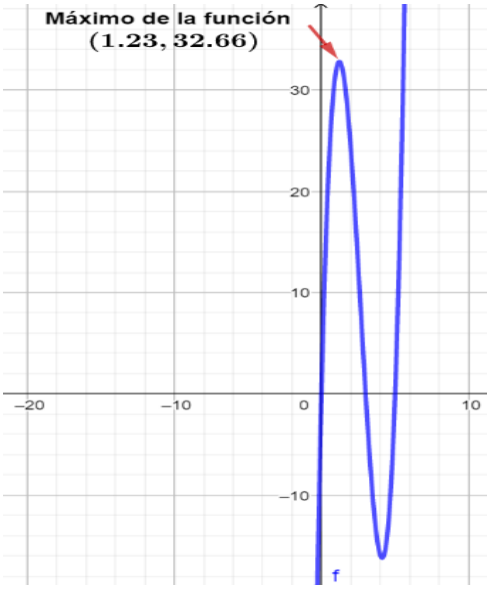
Ancho de la caja = $\mathbf{6 - 2x}$

- De ahí que, la función para calcular el volumen es:

$$\boldsymbol{V = (largo)(ancho)(alto)}$$

$$\boldsymbol{V = (10 - 2x)(6 - 2x)(x)}$$
$$\boldsymbol{V = (60 - 20x - 12x + 4x^2)(x)}$$
$$\boldsymbol{V = (60 - 32x + 4x^2)(x)}$$
$$\boldsymbol{V = 60x - 32x^2 + 4x^3}$$

- La función obtenida es:



$$\boldsymbol{f(x) = 4x^3 - 32x^2 + 60x}$$

- Para conocer el volumen máximo se grafica la función y se observa el comportamiento, para identificar la curva más alta y las coordenadas del punto máximo.

- El valor de $\boldsymbol{f(x)}$ en el punto máximo es el volumen máximo de la caja. En este caso se aprecia en la gráfica que la función alcanza su máximo en las coordenadas (1.23, 32.66).

- La **capacidad máxima** de las cajas que construirá el estudiante es de $\mathbf{32.66\ cm^3}$ y la altura es de $\mathbf{1.23\ cm.}$

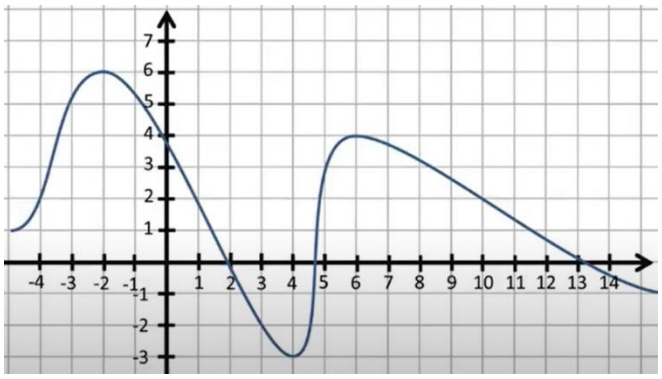
I. Considera la gráfica y relaciona ambas columnas.

A(-2, 6) ( ) Mínimo absoluto

B(4, -3) ( ) Máximo absoluto

C(6, 4) ( ) Mínimo relativo

( ) Máximo relativo



II. Analiza la información, traza la gráfica y resuelve las preguntas.

El precio en dólares de las acciones de una empresa durante un año está determinado por la función

$$f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 8x + 32)$$

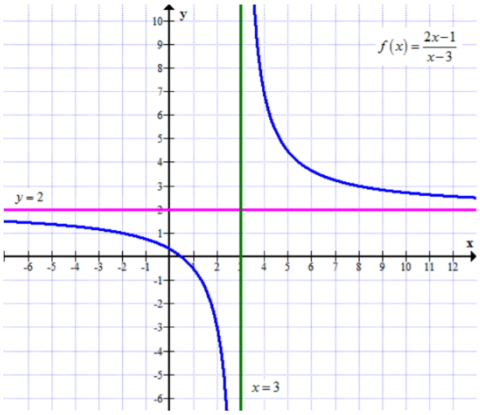
donde $f(x)$ es igual al costo de la acción y x corresponde al mes del año.

1. ¿En qué mes fue el precio más bajo?

2. ¿Cuál fue el precio menor que se pagó por una acción?

2. Asíntotas

Una asíntota es una recta que se aproxima muy cerca de una curva, pero nunca la toca. El tipo de asíntota depende de la recta.



En la gráfica se observa una asíntota vertical (en verde) y una horizontal (en rosa) que corresponden a la ecuación $f(x)=\frac{2x-1}{x-3}$.

2.1 Asíntotas horizontales

Son rectas horizontales asociadas a la función. Se encuentran presentes únicamente en funciones **racionales** de la forma:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}}=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_p x^p+b_{p-1}x^{p-1}+\cdots+b_1x+b_0}.$$

Donde:

- ✓ $\boldsymbol{n}$ es el grado de $\boldsymbol{g(x)}$
- ✓ $\boldsymbol{p}$ es el grado de $\boldsymbol{h(x)}$

Dependiendo de la relación entre los grados de los dos polinomios, se tienen tres casos:

Caso 1. El grado del polinomio $g(x)$ es menor que el de $h(x)$.

Si $\boldsymbol{n<p}$, se tiene una asíntota horizontal en $\boldsymbol{y=0}$

Ejemplo. Hallar la asíntota horizontal de la función: $\boldsymbol{f(x)=\frac{3x+1}{x^2-1}}$

Solución. $\boldsymbol{n}=1$, $\boldsymbol{p}=2$, entonces $\boldsymbol{n<p}$**,** hay una asíntota horizontal en $\boldsymbol{y=0}$

Como el grado del polinomio del numerador $(n=1)$ es menor que el del denominador $(p=2)$, el valor de la asíntota horizontal es $\boldsymbol{y=0}$.

Caso 2. El polinomio $g(x)$ y $h(x)$ tienen el mismo grado.

Si $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}$, la asíntota horizontal es la recta dada por el cociente de los coeficientes de grado mayor.

$$y = \frac{a_n}{b_p}$$

Ejemplo. Hallar la asíntota horizontal de la función: $\boldsymbol{f(x) = \frac{6x+3}{2x-1}}$

Solución. Como el grado del polinomio del numerador $(n = 1)$ es igual que el del denominador $(p = 1)$, se dividen los coeficientes de los términos de mayor exponente.

$$y = \frac{a_n}{b_p} = \frac{6}{2} = \mathbf{3}$$

Así, el valor de la asíntota horizontal es $y = \mathbf{3}$.

Caso 3. El grado del polinomio $g(x)$ es mayor que el de $h(x)$.

Si $\boldsymbol{n} > \boldsymbol{p}$, NO hay asíntota horizontal.

Ejemplo. Hallar la asíntota horizontal de la función: $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2-1}{2x-4}}$

Solución. Como el grado del polinomio del numerador es mayor que el del denominador, NO existen asíntotas horizontales.

2.2 Asíntotas verticales

Son rectas verticales asociadas a la función. Se encuentran presentes únicamente en funciones racionales de la forma:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}}$$

Y se determinan encontrando las raíces del denominador $\boldsymbol{h(x)}$ correspondiente. Pasos a seguir:

1. Factorizar el numerador y el denominador.
2. Si es posible, simplificar la expresión resultante; en caso de que se pueda simplificar el factor simplificado, esto representa un “salto” en la gráfica de la función.
3. Igualar cada uno de los factores del denominador a **0** y despejar el valor de **x**.

Ejemplo. Hallar las asíntotas verticales de la función

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{2}{x^2 - x - 12}}$$

Solución. El polinomio del denominador es de grado dos: $\boldsymbol{x^2 - x - 12}$ que tiene dos raíces.

1. Se factoriza el denominador: $\boldsymbol{x^2 - x - 6 = (x-4)(x+3)}$
2. No es posible simplificar.
3. Igualar cada uno de los factores del denominador a **0** y despejar el valor de **x**.

$$\boldsymbol{x - 4 = 0} \qquad\qquad \boldsymbol{x + 3 = 0}$$
$$\boldsymbol{x = 4} \qquad\qquad \boldsymbol{x = -3}$$

Las asíntotas verticales se ubican en:

$$\boldsymbol{x = 4}$$
$$\boldsymbol{x = -3}$$

Ejemplos de asíntotas horizontales y verticales

Ejemplo 1. Determina las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales de la función: $\boldsymbol{f(x) = \frac{3}{x^2-4}}$

Solución

- Para obtener la **asíntota horizontal** se analizan los grados de las funciones que componen la función racional:

$$n = 0 \text{ y } p = 2$$

Como $\boldsymbol{n < p}$, se trata del caso 1, hay una **asíntota horizontal** en $\boldsymbol{y = 0}$

- Para obtener la **asíntota vertical** se factoriza el denominador, se igualan a cero los factores y se despeja x:

$$\boldsymbol{x^2 - 4 = (x-2)(x+2)}$$
$$\boldsymbol{x - 2 = 0} \qquad \boldsymbol{x + 2 = 0}$$
$$\boldsymbol{x = 2} \qquad \boldsymbol{x = -2}$$

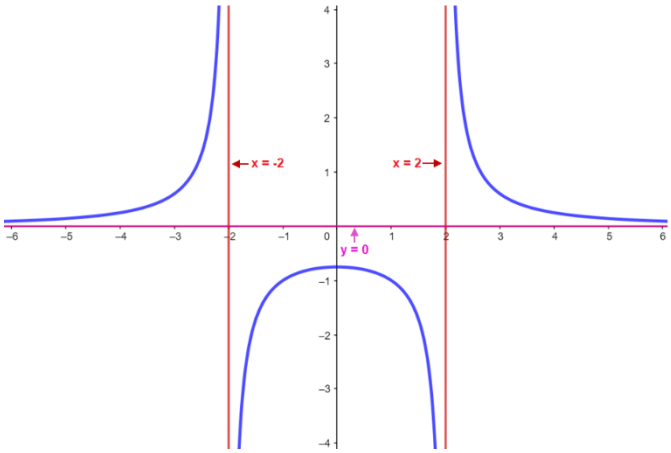
En este ejemplo el denominador se puede igualar a cero y despejar “x”:

$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 9$$
$$\sqrt{x^2} = 4$$
$$x = \pm 2$$

- Hay una asíntota vertical en $\boldsymbol{x = -2}$ y otra en $\boldsymbol{x = 2}$

- Se grafican las asíntotas.

- Se observa que en la función hay una asíntota **horizontal** en $\boldsymbol{y = 0}$ y dos asíntotas **verticales** en $\boldsymbol{x = -2\ y\ x = 2}$**.**



Ejemplo 2. Determina las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales de la función: $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+x-6}}$

Solución

- Para obtener la **asíntota horizontal** se analizan los grados de las funciones que componen la función racional:

$$n = 2 \text{ y } p = 2$$

Como $\boldsymbol{n = p}$, se trata del caso 2, hay una **asíntota horizontal en**

$$y = \frac{a_n}{b_p} = \frac{1}{1} \qquad \boldsymbol{y = 1}$$

- Para obtener la **asíntota vertical** se factorizan el numerador y el denominador:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)}}$$

- Se simplifica la expresión (términos semejantes):

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x+3)}}$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{(x+2)}{(x+3)}}$$

- Se iguala a cero el denominador y se despeja x:

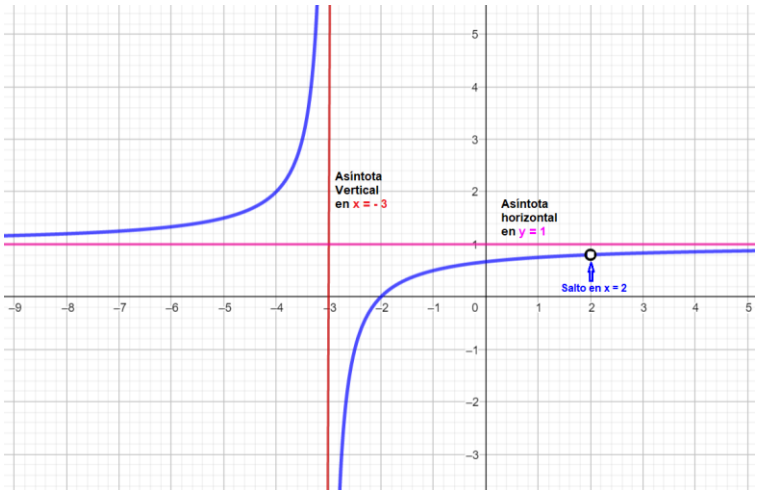
$$\boldsymbol{x + 3 = 0}$$
$$\boldsymbol{x = -3}$$

- Por lo tanto, hay una asíntota vertical en $\boldsymbol{x = -3}$

- Se grafican las asíntotas.

- Se observa que en la función hay dos valores no permitidos: $\boldsymbol{x = -3}$ **y** $\boldsymbol{x = 2}$

- Cuando se simplifica la expresión se puede observar que solo queda un factor $\boldsymbol{x + 3}$ que se simplifica $\boldsymbol{x - 2}$ **se** representa como una discontinuidad o **"salto"** en $\boldsymbol{x = 2}$ en la gráfica.



Ejemplo 3. Determina las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales de la función: $\boldsymbol{f(x) = \frac{4x+2}{2x-6}}$

Solución

- Para obtener la **asíntota horizontal** se analizan los grados de las funciones que componen la función racional:

$$n = 1 \text{ y } p = 1$$

Como $\boldsymbol{n = p}$, se trata del caso 2, hay una asíntota horizontal en:

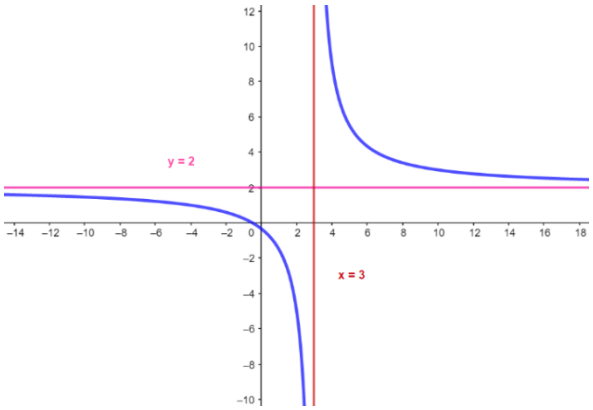
$$y = \frac{a_n}{b_p} = \frac{4}{2} \qquad \boldsymbol{y = 2}$$

- Para obtener la **asíntota vertical** se iguala a cero el denominador y se despeja x:

$$\boldsymbol{2x - 6 = 0}$$
$$\boldsymbol{2x = 6}$$
$$\boldsymbol{x = \frac{6}{2}} \qquad \boldsymbol{x = 3}$$

- Se grafican las asíntotas.

- Se observa que en la función hay una asíntota **horizontal** en $\boldsymbol{y = 2}$ y una asíntota **vertical** en $\boldsymbol{x = 3}$.



Ejemplo 4. Determina las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales de la función: $\boldsymbol{f(x) = \frac{2}{x(x-1)}}$

Solución

- Para obtener la **asíntota horizontal** se analizan los grados de las funciones que componen la función racional:

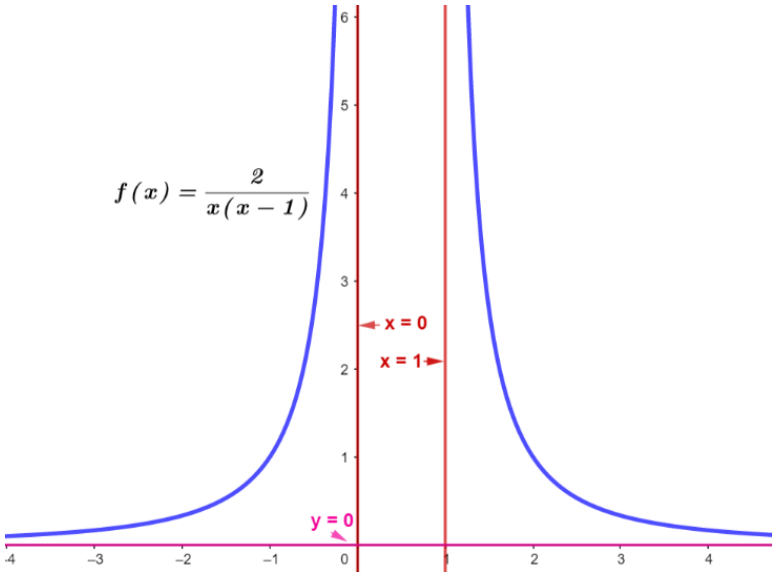
$$n = 0 \text{ y } p = 2$$

Como $\boldsymbol{n < p}$, se trata del caso 1, hay una **asíntota horizontal** en $\boldsymbol{y = 0}$

- Para obtener la **asíntota vertical** se igualan a cero los factores del denominador y se despeja x:

$$\boldsymbol{x(x-1) = 0}$$
$$\boldsymbol{x = 0 \qquad x - 1 = 0}$$
$$\boldsymbol{x = 0 \qquad x = 1}$$

- Hay una asíntota vertical en $\boldsymbol{x = 0}$ y otra en $\boldsymbol{x = 1}$
- Se grafican las asíntotas.
- Se observa que en la función hay una asíntota **horizontal** en $\boldsymbol{y = 0}$ y dos asíntotas **verticales** en $\boldsymbol{x = 0}$ y $\boldsymbol{x = 1}$**.**



CALCULA en cada una de las funciones racionales las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

Función	Asíntota horizontal	Asíntota vertical
1. $f(x) = \frac{5}{x(x+3)}$		
2. $f(x) = \frac{x}{2x^2 - 32}$		
3. $f(x) = \frac{2x}{3x+3}$		
4. $f(x) = \frac{6x^2}{2x^2 - x - 6}$		

3. Concepto de derivada y razón de cambio

En matemáticas una ***razón*** es una comparación o relación mediante una división cuyo resultado se denomina ***cociente***. Una función ***f(x)*** relaciona la variable independiente ***x*** con la variable dependiente ***y***, es decir, los elementos de dominio con los elementos del contra dominio de la función, en donde un cambio en el valor ***x*** induce un cambio en y.

El concepto de ***razón de cambio*** se refiere a la modificación de una variable en relación con otra.

Un cambio en una variable se puede llamar también ***incremento***, que se simboliza con la letra griega ***delta*** (Δ). Por ello, un cambio en la variable x se representa como Δx y el cambio en la función como Δy.

El incremento de x se determina como: $\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_{2-}x_1}$

La ***derivada de una función y*** con respecto a una variable ***x*** es el ***límite del incremento de la función entre el incremento de la variable cuando el incremento de la variable tiende a cero***, y se representa así:

$$\mathbf{Derivada} = \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \lim_{\Delta \boldsymbol{x} \to \mathbf{0}} \frac{\Delta \mathbf{y}}{\Delta \mathbf{x}}$$

Cuando la razón tiene límite se dice que la función tiene derivada, y así, al proceso de encontrar una derivada se le llama *diferenciación*.

La derivada de una función puede interpretarse geométricamente como la pendiente por una curva, y físicamente como una razón “instantánea” de cambio.

El valor de la ***derivada*** de una ***función constante*** o lineal representa la ***pendiente de la recta***.

El valor de la ***derivada*** de una función en ***cualquier punto de la gráfica*** de una curva es igual a ***la pendiente m de la recta tangente a la curva*** en ese punto dado.

Existen varios ***tipos o formas de notación*** para representar una derivada.

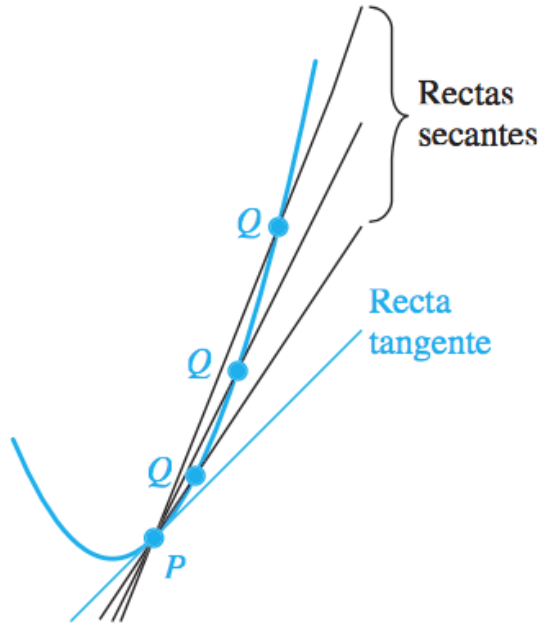
Sabiendo que $\boldsymbol{f(x) = y}$, las notaciones más comunes para representar la derivada de una función son:

Notación	Derivada
Cauchy	$\boldsymbol{Df(x)\ o\ Df}$
Lagrange	$\boldsymbol{f'(x)\ \ o\ f'}$
Leibniz	$\boldsymbol{\frac{df}{dx}\ \ o\ \frac{d}{dx}(f)}$

Lagrange, Cauchy y Leibniz fueron los científicos que inventaron las notaciones más usadas.

Interpretación geométrica de la derivada

Sea $\boldsymbol{P}$ un punto en una curva y sea $\boldsymbol{Q}$ un punto móvil cercano a P en esa curva. Considere la recta que pasa por $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$, llamada **recta secante**. La **recta tangente en $\boldsymbol{P}$ es la posición límite** (si esta existe) de la recta secante cuando $\boldsymbol{Q}$ se mueve hacia $\boldsymbol{P}$ a lo largo de la curva, como se muestra en la figura.

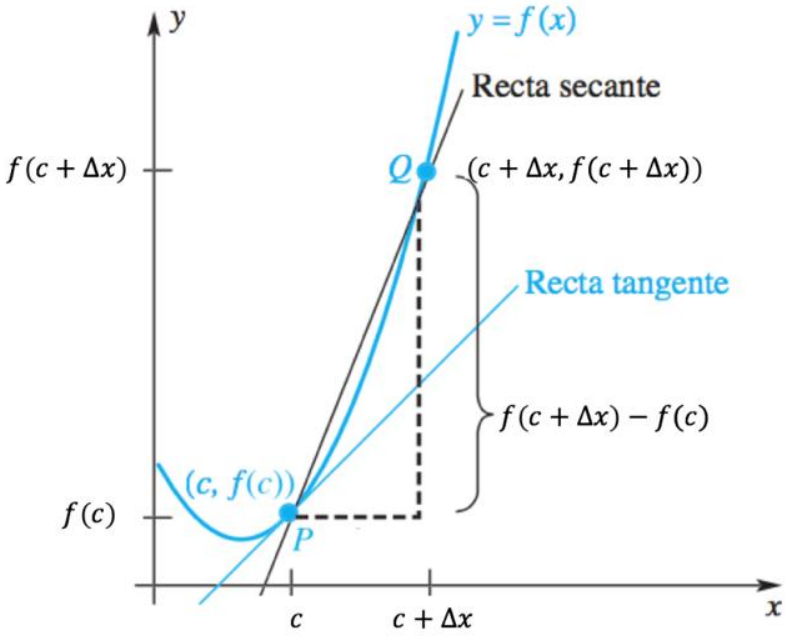


La recta tangente es la posición límite de la recta secante.

Suponga que la curva en la gráfica de la ecuación es $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Entonces $\boldsymbol{P}$ tiene coordenadas $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}))$, y un punto cercano $\boldsymbol{Q}$ tiene las siguientes coordenadas: $(\boldsymbol{c} + \Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c} + \Delta\boldsymbol{x})$, y la recta secante de P y Q tiene pendiente $\boldsymbol{m_{sec}}$ dada por:

$$m_{sec} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$



$$m_{tan} = \lim_{\Delta x \to 0} m_{sec}$$

Mediante el concepto de límite, podemos dar una definición formal de la recta tangente:

Definición. Recta tangente
La recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(c, f(c))$ es aquella recta que pasa por P con pendiente

$$m_{tan} = \lim_{\Delta x \to 0} m_{sec} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

siempre y cuando este límite exista y no sea ∞ o $-\infty$.

De lo anterior, se concluye que el valor de **la derivada de la función $\boldsymbol{f(x)}$** en cualquier punto $(c, \boldsymbol{f(c)})$ de la gráfica de una curva **es igual a la pendiente $\boldsymbol{m}$ de la recta tangente a la curva en ese punto dado** y se representa mediante la regla general de derivación:

$$\frac{\boldsymbol{df}}{\boldsymbol{dx}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

En lugar de la letra $\boldsymbol{c}$ también se utiliza la letra $\boldsymbol{x}$**:**

$$\frac{\boldsymbol{df}}{\boldsymbol{dx}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Regla de los cuatro pasos o cociente de Newton

La derivada de una función f es otra función f' (léase "f prima") cuyo valor en cualquier número x es

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Si este límite existe, decimos que f es derivable en x. Determinar una derivada recibe el nombre de derivación; la parte del cálculo asociada con la derivada se denomina cálculo diferencial.

El procedimiento para derivar una función $f(x)$ consiste en los siguientes pasos:

1. Se da un incremento Δx a la variable independiente x y se determina el valor de la función, es decir $f(x + \Delta x)$.

2. Se obtiene el incremento correspondiente a la función: $f(x + \Delta x) - f(x)$

3. Se obtiene el cociente de los incrementos: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

4. Se calcula el límite del cociente de incrementos: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$; y esto proporciona la derivada de $f(x)$.

Ejemplo 1. Obtén la derivada de la función $\boldsymbol{f(x) = -5x + 10}$

Paso 1:

$$f(x+\Delta x) = -5(x+\Delta x) + 10 = -5x - 5\Delta x + 10$$

Paso 2:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = -5x - 5\Delta x + 10 - (-5x + 10) = -5x - 5\Delta x + 10 + 5x - 10 = -5\Delta x$$

Paso 3:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{-5\Delta x}{\Delta x} = -5$$

Paso 4:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-5) = -5$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{f'(x) = -5}$

Ejemplo 2. Obtén la derivada de la función $\boldsymbol{f(x) = 5x^2 - 13x + 3}$

Paso 1:

$$f(x+\Delta x) = 5(x+\Delta x)^2 - 13(x+\Delta x) + 3 = 5(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 13x - 13\Delta x + 3$$
$$= 5x^2 + 10x\Delta x + 5(\Delta x)^2 - 13x - 13\Delta x + 3$$

Paso 2:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = 5x^2 + 10x\Delta x + 5(\Delta x)^2 - 13x - 13\Delta x + 3 - (5x^2 - 13x + 3)$$
$$= 5x^2 + 10x\Delta x + 5(\Delta x)^2 - 13x - 13\Delta x + 3 - 5x^2 + 13x - 3$$
$$= 10x\Delta x + 5(\Delta x)^2 - 13\Delta x$$

Paso 3:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{10x\Delta x + 5(\Delta x)^2 - 13\Delta x}{\Delta x} = 10x + 5\Delta x - 13$$

Paso 4:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (10x + 5\Delta x - 13) = 10x + 5(0) - 13 = 10x - 13$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{f'(x) = 10x - 13}$

3.1 Derivadas de funciones algebraicas

Cuando se utiliza la definición de la derivada, el proceso de derivación generalmente es largo y tedioso. Afortunadamente hay fórmulas que permiten simplificar el proceso para derivar funciones.

- **Derivada de una constante**

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

- **Derivada de la función identidad**

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

- **Derivada de potencias $\boldsymbol{x^n}$**

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

- **Derivada de una constante por una función**

$$\frac{d}{dx}cf(x) = \boldsymbol{cf}'(x)$$

- **Derivada de la suma y diferencia de funciones**

$$\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w) = u' \pm v' \pm w'$$

- **Derivada del producto de dos funciones**

$$\frac{d}{dx}(uv) = uv' + vu'$$

- **Derivada del cociente de dos funciones**

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

- **Derivada de una potencia de la forma $\boldsymbol{y = u^n}$**

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1} \cdot u'$$

Se abordarán ejemplos de cada una de las fórmulas.

Derivada de una constante

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

Función	Derivada
1. $f(x) = 7$	$f'(x) = 0$
2. $f(x) = -\frac{1}{2}$	$f'(x) = 0$
3. $f(x) = 3\pi$	$f'(x) = 0$

Derivada de potencias x^n

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Al exponente de la variable siempre se le resta 1, ya sea que el exponente original sea positivo, negativo o fraccionario.

Derive las siguientes funciones.

Ejemplo 1. $f(x) = x^4$

Solución
El exponente $n = 4$; luego:

$$f'(x) = 4x^{4-1} = 4x^3$$

Ejemplo 2. $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$

Solución
El exponente es $n = \frac{1}{2}$; entonces:

$$g'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$$

Se usa la **ley del exponente negativo** $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ para que la potencia $x^{-\frac{1}{2}}$ pase al denominador con signo contrario $x^{+\frac{1}{2}}$.

Como el exponente de $\boldsymbol{x}$ es fraccionario $\boldsymbol{x^{\frac{1}{2}}}$ se usa la **Ley de radicales** $\sqrt[n]{\boldsymbol{x^m}} = \boldsymbol{x^{\frac{m}{n}}}$

$$g'(x) = \frac{1}{2\boldsymbol{x^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Recuerda que: $1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{7}{7} = \frac{8}{8} \ldots = \frac{n}{n}$

Ejemplo 3. $y = x^{\frac{7}{4}}$

Solución

El exponente es $n = \frac{7}{4}$; por tanto:

$$y' = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{x^{\frac{7}{4}-\frac{4}{4}}} = \frac{7}{4}\boldsymbol{x^{\frac{3}{4}}}$$

$$y' = \frac{7}{4}\sqrt[4]{\boldsymbol{x^3}}$$

Como el exponente de $\boldsymbol{x}$ es fraccionario $\boldsymbol{x^{\frac{3}{4}}}$ se usa la **Ley de radicales** $\sqrt[n]{\boldsymbol{x^m}} = \boldsymbol{x^{\frac{m}{n}}}$**.**

Ejemplo 4. $\boldsymbol{h(x)} = \sqrt[3]{\boldsymbol{x^2}}$

Solución

Primero se usa la **Ley de radicales** $\sqrt[n]{\boldsymbol{x^m}} = \boldsymbol{x^{\frac{m}{n}}}$ para convertir a exponente fraccionario, luego se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ y se resuelve:

$$h(x) = \sqrt[3]{\boldsymbol{x^2}} = \boldsymbol{x^{\frac{2}{3}}}$$

$$h'(x) = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{x^{\frac{2}{3}-\frac{3}{3}}}$$

$$h'(x) = \frac{2}{3}\boldsymbol{x^{-\frac{1}{3}}}$$

$$h'(x) = \frac{2}{3\boldsymbol{x^{\frac{1}{3}}}}$$

$$h'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Se usa la **ley del exponente negativo** $\boldsymbol{x^{-n}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x^n}}$ para que la potencia $\boldsymbol{x^{-\frac{1}{3}}}$ pase al denominador con signo contrario $\boldsymbol{x^{+\frac{1}{3}}}$.

Como el exponente de $\boldsymbol{x}$ es fraccionario $\boldsymbol{x^{\frac{1}{3}}}$ se usa la **Ley de radicales** $\sqrt[n]{\boldsymbol{x^m}} = \boldsymbol{x^{\frac{m}{n}}}$**.**

Ejemplo 5. $\boldsymbol{f(t) = \frac{1}{t^3}}$

Solución

Se reescribe $f(t) = \frac{1}{t^3}$ de forma que puede derivarse, para ello se usa la **ley del exponente negativo** $\boldsymbol{\frac{1}{x^n} = x^{-n}}$ y luego se deriva:

$$f(t) = \frac{1}{\boldsymbol{t^3}} = \boldsymbol{t^{-3}}$$

$$f'(t) = -3\boldsymbol{t^{-3-1}}$$

$$f'(t) = -3\boldsymbol{t^{-4}}$$

Se usa de nuevo la **ley del exponente negativo** $\boldsymbol{x^{-n} = \frac{1}{x^n}}$**:**

$$f'(t) = -\frac{3}{\boldsymbol{t^4}}$$

Derivada de una constante por una función

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx} cf(x) = cf'(x)}$$

Esta fórmula podemos entenderla de la siguiente manera:

Para encontrar la derivada de una constante por una función **"se deja la constante a un lado"** y encontramos la derivada de la función. Al final, **se realiza la multiplicación de la constante por la derivada de la función.**

Ejemplo 1. Encuentra la derivada de $\boldsymbol{y = 8x}$

Solución

Observemos que la constante **8** está multiplicanco la función identidad $\boldsymbol{y = x}$. Entonces, "se hace a un lado el 8" y se encuentra la derivada de la función.

Nota: Se utilizará la notación de Leibniz para poder visualizar el procedimiento con mayor claridad, pero se dará la respuesta en la notación de Lagrange.

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}(8x) = 8\frac{d}{dx}(x)}$$

Se sabe que la derivada de la función identidad es 1, por lo tanto:

$$\frac{d}{dx}(8x) = 8\frac{d}{dx}(x) = 8(1)$$

Luego, se multiplica la constante por la derivada de la función; quedando de la siguiente manera:

$$y' = 8$$

Ejemplo 2. Calcula la derivada de $y = 5x^3$

Solución

Se observa que la constante 5 está multiplicanco la función $y = x^3$. Entonces, "se hace a un lado el 3" y se encuentra la derivada de la función.

$$\frac{d}{dx}(5x^3) = 5\frac{d}{dx}(x^3)$$

Se aplica la **fórmula** $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ para encontrar la derivada de $y = x^3$ y entonces se tiene:

$$\frac{d}{dx}(5x^3) = 5\frac{d}{dx}(x^3) = 5(3x^2)$$

Luego, se multiplica la constante por la derivada de la función; quedando de la siguiente manera:

$$y' = 15x^2$$

Ejemplo 3. Deriva la función $f(x) = -3x^{10}$

Solución. La derivada de una constante por x^n sería $\frac{d}{dx}c.x^n = c\,[nx^{n-1}]$

$$f'(x) = -3[10x^{10-1}]$$
$$f'(x) = -30x^9$$

Ejemplo 4. Encuentra la derivada de $\boldsymbol{f(x) = 4\sqrt{x^5}}$

Solución

Se reescribe la función usando la ley de radicales $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, luego se deriva:

$$\boldsymbol{f(x) = 4\sqrt{x^5} = 4x^{\frac{5}{2}}}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = 4\left(\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-\frac{2}{2}}\right) = 4\left(\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}\right)}$$

Se multiplica la constante por la derivada de la función:

$$\boldsymbol{f'(x) = 4\left(\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{20}{2}x^{\frac{3}{2}} = 10x^{\frac{3}{2}}}$$

Puesto que el exponente de x es fraccionario se utiliza la ley de radicales $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, quedando la derivada así:

$$\boldsymbol{f'(x) = 10x^{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{x^3}}$$

Ejemplo 5. Calcula la derivada de $\boldsymbol{f(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{7}{6}}}$

Solución. Se utiliza la fórmula $\boldsymbol{\frac{d}{dx}c.x^n = c\,(nx^{n-1})}$**:**

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}-\frac{6}{6}}\right)}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{7}{6}x^{\frac{1}{6}}\right)}$$ Se multiplica $\boldsymbol{\frac{3}{4}}$ *por* $\boldsymbol{\frac{7}{6}}$, $\boldsymbol{\frac{3*7}{4*6} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}}$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{7}{8}x^{\frac{1}{6}}}$$

Se utiliza la ley de radicales $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, quedando la derivada así:

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{7}{8}\sqrt[6]{x}}$$

Ejemplo 6. Deriva la función $\boldsymbol{y = \frac{10}{x^4}}$

Solución. Se reescribe la función usando la **ley del exponente negativo** $\boldsymbol{\frac{1}{x^n} = x^{-n}}$**:**

$$\boldsymbol{y = 10x^{-4}}$$

Se deriva la función con la fórmula de una constante $\frac{d}{dx}c.x^n = c\,(nx^{n-1})$:

$$y' = 10(-4x^{-4-1})$$
$$y' = 10(-4x^{-3})$$
$$y' = -40x^{-3}$$

Se utiliza nuevamente la ley del exponente negativo $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$:

$$y' = \frac{-40}{x^{-3}}$$

Derivada de la suma y diferencia de funciones

$$\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w) = u' \pm v' \pm w'$$

Deriva las siguientes funciones:

Ejemplo 1. $g(t) = 9t^3 - 7t^2 + 6t - \frac{2}{3}$

Solución. Se deriva cada término del polinomio.

$$g'(t) = 9(3t^{3-1}) - 7(2t^{2-1}) + 6(1) - 0$$

$$g'(t) = 27t^2 - 14t + 6$$

Ejemplo 2. $f(x) = 3\sqrt[4]{x^5} - \frac{6}{\sqrt{x^3}}$

Solución. Se reescribe la función usando la ley de radicales $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$:

$$f(x) = 3x^{5/4} - \frac{6}{x^{3/2}}$$

Puesto que en el término $\frac{6}{x^{3/2}}$ la potencia se encuentra en el denominador, se usa la ley del exponente negativo $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$:

$$f(x) = 3x^{5/4} - 6x^{-3/2}$$

Enseguida se deriva cada término usando la fórmula $\frac{d}{dx}c.x^n = c\,(nx^{n-1})$:

$$f'(x) = 3\left(\frac{5}{4}x^{\frac{5}{4}-\frac{4}{4}}\right) - 6\left(-\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-\frac{2}{2}}\right)$$

$$f'(x) = 3\left(\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}\right) - 6\left(-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}\right)$$

$$f'(x) = \frac{15}{4}x^{\frac{1}{4}} + \frac{18}{2}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{15}{4}x^{\frac{1}{4}} + 9x^{-\frac{5}{2}}$$

Dado que en el término $9x^{-\frac{5}{2}}$ tiene potencia negativa, se usa la ley del exponente negativo $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$:

$$f'(x) = \frac{15}{4}x^{\frac{1}{4}} + \frac{9}{x^{\frac{5}{2}}}$$

Finalmente, se usa la ley de radicales $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$:

$$f'(x) = \frac{15}{4}\sqrt[4]{x} + \frac{9}{\sqrt{x^5}}$$

Ejemplo 3. $y = \frac{10x^4 - 7x^3 + 8x - 2}{2x^2}$

Solución. Primero se divide cada término del numerador entre el término del denominador $2x^2$, recuerda que en la división los exponentes se restan:

$$y = \frac{10x^4}{2x^2} - \frac{7x^3}{2x^2} + \frac{8x^2}{2x^2} - \frac{2x}{2x^2} - \frac{6}{2x^2}$$

$$y = 5x^2 - \frac{7}{2}x + 4 - x^{-1} - 3x^{-2}$$

Se deriva cada término por reglas ya conocidas:

$$y' = 5(2x^{2-1}) - \frac{7}{2}(1) + 0 - (-1x^{-1-1}) - 3(-2x^{-2-1})$$

$$y' = 10x - \frac{7}{2} + x^{-2} + 6x^{-3}$$

Se ordena el polinomio: $y' = 10x + x^{-2} + 6x^{-3} - \frac{7}{2}$

Se aplica la ley $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ $\qquad$ $y' = 10x + \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{7}{2}$

Derivada del producto de dos funciones

$$\frac{d}{dx}(uv) = uv' + vu'$$

Deriva las siguientes funciones:

Ejemplo 1. $f(x) = (6x^2 - 2x + 3)(5 - 7x)$

Solución. Sea $f(x) = uv$, se requiere calcular la derivada de las funciones u y v

Datos
$u = 6x^2 - 2x + 3 \qquad v = 5 - 7x$
$u' = 12x - 2 \qquad v' = -7$

Se aplica la fórmula para derivar el producto de dos funciones y se realizan operaciones:

	u	v'		v	u'
$f'(x) =$	$(6x^2 - 2x + 3)$	(-7)	+	$(5 - 7x)$	$(12x - 2)$

$$f'(x) = -42x^2 + 14x - 21 + (60x - 10 - 84x^2 + 14x)$$
$$f'(x) = -42x^2 + 14x - 21 + 60x - 10 - 84x^2 + 14x$$

$$f'(x) = -126x^2 + 88x - 31$$

Ejemplo 2. $f(x) = (2x^2 - 1)(2x^3 + 3x)$

Solución. Sea $f(x) = uv$, se requiere calcular la derivada de las funciones u y v

Datos
$u = 2x^2 - 1 \qquad v = 2x^3 + 3x$
$u' = 4x \qquad v' = 6x^2 + 3$

Se aplica la fórmula para derivar el producto de dos funciones y se realizan operaciones:

	u	v'		v	u'
$f'(x) =$	$(2x^2 - 1)$	$(6x^2 + 3)$	+	$(2x^3 + 3x)$	$(4x)$

$$f'(x) = 12x^4 + 6x^2 - 6x^2 - 3 + (8x^4 + 12x^2)$$
$$f'(x) = 12x^4 + 6x^2 - 6x^2 - 3 + 8x^4 + 12x^2$$

$$f'(x) = 20x^4 + 12x^2 - 3$$

Ejemplo 3. $f(x) = (6x - 2)(4x^2 + 2x - 4)$

Solución. Sea $f(x) = uv$, se requiere calcular la derivada de las funciones u y v

Datos
$u = 6x - 2 \qquad v = 4x^2 + 2x - 4$
$u' = 6 \qquad v' = 8x + 2$

Se aplica la fórmula para derivar el producto de dos funciones y se realizan operaciones:

$$\frac{d}{dx}(uv) = uv' + vu'$$

$$f'(x) = (6x - 2)(8x + 2) + (4x^2 + 2x - 4)(6)$$
$$f'(x) = 48x^2 + 12x - 16x - 4 + (24x^2 + 12x - 24)$$
$$f'(x) = 48x^2 + 12x - 16x - 4 + 24x^2 + 12x - 24$$

$$f'(x) = 72x^2 + 8x - 28$$

Derivada del cociente de dos funciones

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

Ejemplo 1. Deriva la función $f(x) = \frac{3x^2-1}{x^2+4}$

Solución. Sea $f(x) = \frac{u}{v}$, se requiere calcular la derivada de las funciones u y v

Datos
$u = 3x^2 - 1 \qquad v = x^2 + 4$
$u' = 6x \qquad v' = 2x$

Se aplica la fórmula para derivar el cociente de dos funciones y se realizan operaciones:

$$\frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+4)(6x) - (3x^2-1)(2x)}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^3 + 24x - (6x^3 - 2x)}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^3 + 24x - 6x^3 + 2x}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{26x}{(x^2+4)^2}$$

El resultado anterior es válido, sin embargo, se puede desarrollar el binomio al cuadrado del denominador:

$$f'(x) = \frac{26x}{(x^2)^2 + 2(x^2)(4) + (4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{26x}{x^4 + 8x^2 + 16}$$

Ejemplo 2. Deriva la función $f(x) = \frac{x^3+5x}{4x^2-8}$

Solución. Sea $f(x) = \frac{u}{v}$, se requiere calcular la derivada de las funciones u y v

Datos

$u = x^3 + 5x \qquad v = 4x^2 - 8$

$u' = 3x^2 + 5 \qquad v' = 8x$

Se aplica la fórmula para derivar el cociente de dos funciones y se realizan operaciones:

$$\frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(4x^2-8)(3x^2+5) - (x^3+5x)(8x)}{(4x^2-8)^2}$$

$$f'(x) = \frac{12x^4 + 20x^2 - 24x^2 - 40 - (8x^4 + 40x^2)}{(4x^2-8)^2}$$

$$f'(x) = \frac{12x^4 + 20x^2 - 24x^2 - 40 - 8x^4 - 40x^2}{(4x^2 - 8)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^4 - 44x^2 - 40}{(4x^2 - 8)^2}$$

El resultado anterior es válido, sin embargo, se puede desarrollar el binomio al cuadrado del denominador:

$$f'(x) = \frac{4x^4 - 44x^2 - 40}{(4x^2)^2 + 2(4x^2)(-8) + (-8)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^4 - 44x^2 - 40}{16x^4 - 64x^2 + 64}$$

Y de ser posible, se puede factorizar tanto el numerador como el denominador:

$$f'(x) = \frac{4(x^4 - 11x^2 - 10)}{4(4x^4 - 16x^2 + 16)} = \left(\frac{4}{4}\right)\left(\frac{x^4 - 11x^2 - 10}{4x^4 - 16x^2 + 16}\right) = (1)\left(\frac{x^4 - 11x^2 - 10}{4x^4 - 16x^2 + 16}\right)$$

Nota 1: Se hace la aclaración que el paso anterior no será posible de realizar en todos los ejercicios, por eso es importante repasar el tema de **factorización** para poder definir si es posible aplicarlo o no.

Nota 2: El objetivo de utilizar todos los procedimientos algebraicos posibles es tener una expresión más sencilla de visualizar, pero bien puede considerarse como una respuesta correcta la expresión $f'(x) = \frac{4x^4 - 44x^2 - 40}{(4x^2 - 8)^2}$.

La derivada de la función será:

$$f'(x) = \frac{x^4 - 11x^2 - 10}{4x^4 - 16x^2 + 16}$$

Ejemplo 3. Deriva la función $y = \frac{-x^2+4x-3}{2x^4+5x}$

Solución. Sea $y = \frac{u}{v}$, se requiere calcular la derivada de las funciones u y v

Datos

$u = -x^2 + 4x - 3$ $\quad$ $v = 2x^4 + 5x$

$u' = -2x + 4$ $\quad$ $v' = 8x^3 + 5$

Se aplica la fórmula para derivar el cociente de dos funciones y se realizan operaciones:

$$\frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$y' = \frac{(2x^4 + 5x)(-2x + 4) - (-x^2 + 4x - 3)(8x^3 + 5)}{(2x^4 + 5x)^2}$$

$$y' = \frac{-4x^5 + 8x^4 - 10x^2 + 20x - (-8x^5 + 32x^4 - 24x^3 - 5x^2 + 20x - 15)}{(2x^4 + 5x)^2}$$

$$y' = \frac{-4x^5 + 8x^4 - 10x^2 + 20x + 8x^5 - 32x^4 + 24x^3 + 5x^2 - 20x + 15}{(2x^4 + 5x)^2}$$

$$y' = \frac{4x^5 - 24x^4 + 24x^3 - 5x^2 + 15}{(2x^4 + 5x)^2}$$

El resultado anterior es válido, sin embargo, se puede desarrollar el binomio al cuadrado del denominador:

$$y' = \frac{4x^5 - 24x^4 + 24x^3 - 5x^2 + 15}{(2x^4)^2 + 2(2x^4)(5x) + (5x)^2}$$

$$y' = \frac{4x^5 - 24x^4 + 24x^3 - 5x^2 + 15}{4x^8 + 20x^5 + 25x^2}$$

Nota: Si no es posible factorizar, entonces la expresión anterior es la respuesta final.

Derivada de una potencia de la forma $y = u^n$

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1} \cdot u'$$

Ejemplo 1. **Deriva la función** $f(x) = (2x^4 + 5x^3 - 3x)^6$

Solución. Se trata de una función elevada a una potencia donde $u = 2x^4 + 5x^3$ y hay que sacar su derivada u'.

Datos

$u = 2x^4 + 5x^3 - 3x \qquad n = 6$

$u' = 8x^3 + 15x^2 - 3$

Se sustituyen los datos en la fórmula $\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1} \cdot u'$ y se resuelve:

	n	u^{n-1}	u'
$f'(x) =$	(6)	$(2x^4 + 5x^3 - 3x)^{6-1}$	$(8x^3 + 15x^2 - 3)$

$$f'(x) = (6)(2x^4 + 5x^3 - 3x)^5 (8x^3 + 15x^2 - 3)$$

$$f'(x) = (6)(8x^3 + 15x^2 - 3)(2x^4 + 5x^3 - 3x)^5$$

$$f'(x) = (48x^3 + 90x^2 - 18)(2x^4 + 5x^3 - 3x)^5$$

Ejemplo 2. **Deriva la función** $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$

Solución. Antes de derivar se reescribe la función

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$$

$$f(x) = (x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}$$

Se trata de una función elevada a una potencia donde $u = x^2 - 1$, hay que sacar su derivada u'.

Datos

$u = x^2 - 1 \qquad n = \frac{2}{3}$

$u' = 2x$

Se sustituyen los datos en la fórmula $\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1} \cdot u'$ y se resuelve:

	n	u^{n-1}	u'

$f'(x) =$	$\left(\frac{2}{3}\right)$	$(x^2-1)^{\frac{2}{3}-\frac{3}{3}}$	$(2x)$

$$f'(x) = \left(\frac{2}{3}\right)(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}(2x)$$

$$f'(x) = \left(\frac{2}{3}\right)(2x)(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \left(\frac{4x}{3}\right)(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}$$

Se usa la **ley del exponente negativo** $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

$$f'(x) = \frac{4x}{3(x^2-1)^{\frac{1}{3}}}$$

$$f'(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$$

Se usa la **ley de radicales** $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

Ejemplo 3. Deriva la función $f(x) = \frac{2}{3}(3x-7)^{-9}$

Solución. Se trata de una función elevada a una potencia donde $u = 3x - 7$, hay que sacar su derivada u'.

Datos

$u = 3x - 7$ $\qquad n = -9$

$u' = 3$

Se sustituyen los datos en la fórmula $\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1} \cdot u'$ y se resuelve:

$$f'(x) = (-9)(3x-7)^{-9}(3)$$

$$f'(x) = (-9)(3)(3x-7)^{-9}$$

Se usa la **ley del exponente negativo** $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

$$f'(x) = \frac{-27}{(3x-7)^9}$$

Ejemplo 4. Deriva la función $f(x) = \frac{5}{4}(2x^2 + 6)^{\frac{3}{2}}$

Solución. Se trata de una función elevada a una potencia donde $u = 2x^2 + 6$, hay que sacar su derivada u'.

Datos

$u = 2x^2 + 6 \qquad n = \frac{3}{2}$

$u' = 4x$

Se sustituyen los datos en la fórmula $\frac{d}{dx} c \cdot u^n = c(nu^{n-1} \cdot u')$ y se resuelve:

$$f'(x) = \left(\frac{5}{4}\right)(2x^2 + 6)^{\frac{3}{2}}(4x)$$

$$f'(x) = \left(\frac{5}{4}\right)(4x)(2x^2 + 6)^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{20x}{4}(2x^2 + 6)^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = 5x(2x^2 + 6)^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = 5x\sqrt{(2x^2 + 6)^3}$$

Se usa la **ley de radicales** $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

Actividades de aprendizaje

Derivadas algebraicas

Encuentra la derivada de las siguientes funciones:

1) $y = 2x^5 - 3x^2 + 25$

2) $f(x) = 2x^5 + 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 6x - 1$

3) $y = \left(x^5 - x^4\right)^5$

4) $f(x) = (4x^2 + 6x - 3)^4$

5) $f(x) = (x^3 + x)(5x^2 + 7x - 8)$

6) $y = (4x^2 - 9)(2x + 1)$

7) $f(x) = \frac{4x^3 - 8}{7x^2 + 4}$

8) $y = \frac{10x^2+6x+1}{x-8}$

9) $y = \frac{9x^2+4}{12x-16}$

10) $y = (10x^4 + 15x^2 - 20)^6$

Actividad 1. Máximos y mínimos de una función

I. Considera las gráficas y relaciona ambas columnas.

A(-2, 3) ( ) Mínimo absoluto

B(1, -1) ( ) Máximo absoluto

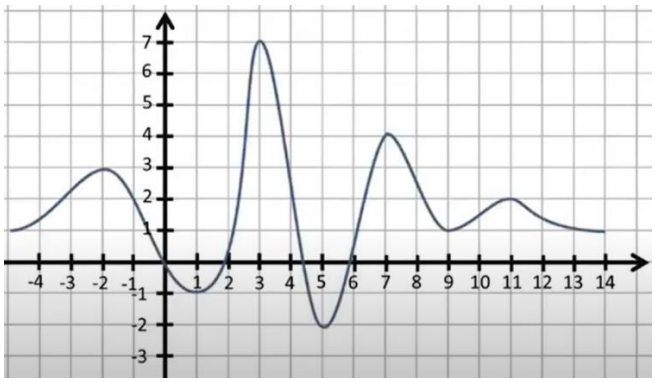
C(3, 7) ( ) Mínimo relativo

D(5, -2) ( ) Máximo relativo

E(7, 4)

F(9, 1)

E(11, 2)

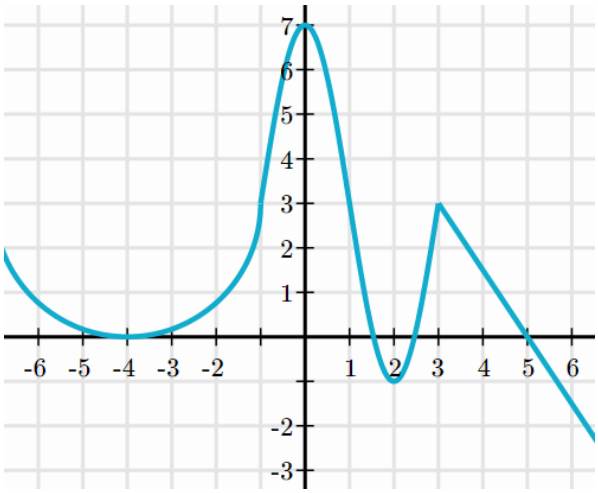


A(-4, 0) ( ) Mínimo absoluto

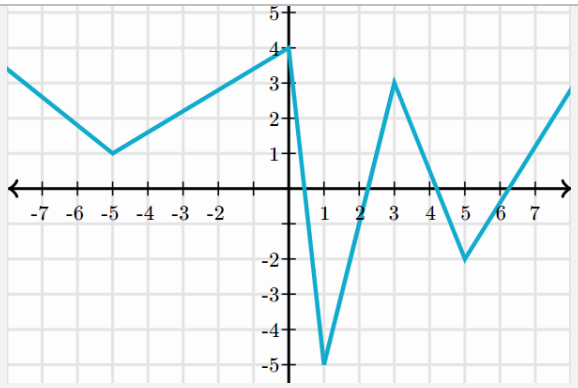
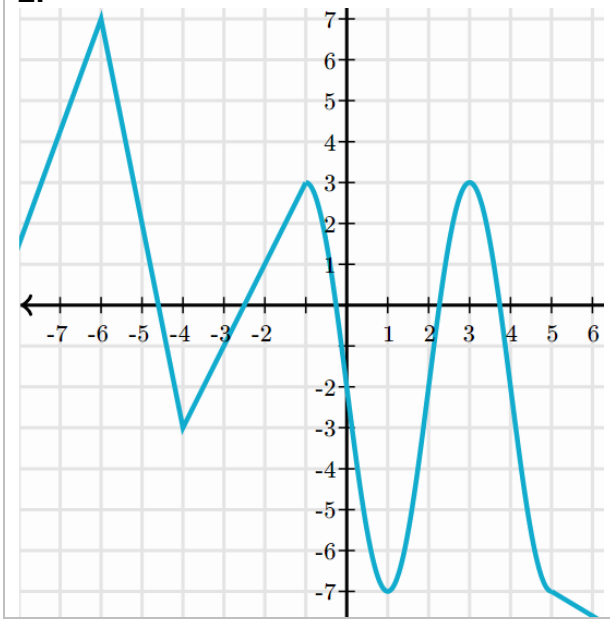
B(0, 7) ( ) Mínimo relativo

C(2, -1) ( ) Máximo absoluto

D(3, 3) ( ) Máximo relativo



II. Determina los máximos y mínimos absolutos y relativos en las siguientes gráficas.

Gráfica	Máximo absoluto	Máximo(s) relativo(s)	Mínimo absoluto	Mínimo(s) relativo(s)
1. 				
2. 				

III. Analiza la información, traza la gráfica y resuelve las preguntas.

Erick tiene una vidriera y le encargaron fabricar una pecera en forma de prisma rectangular. Si tiene un vidrio que mide $\mathbf{27} \times \mathbf{36}$ pulgadas y corta cuadros iguales de la do $\boldsymbol{x}$ en cada esquina para luego cortar también los lados y utilizarlos para la pecera.

1. ¿Cuál es el volumen máximo de agua que podrá contener la pecera?

2. ¿Cuál debe ser la altura de la pecera para contener el volumen máximo de agua posible?

Actividad 2. Asíntotas

I. **Calcula las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales en cada una de las siguientes funciones. Utiliza algún graficador (por ejemplo, Geogebra) para realizar las gráficas de las funciones**

1. $f(x) = \dfrac{2}{x+5}$

2. $f(x) = \dfrac{2x}{(x-2)(x+1)}$

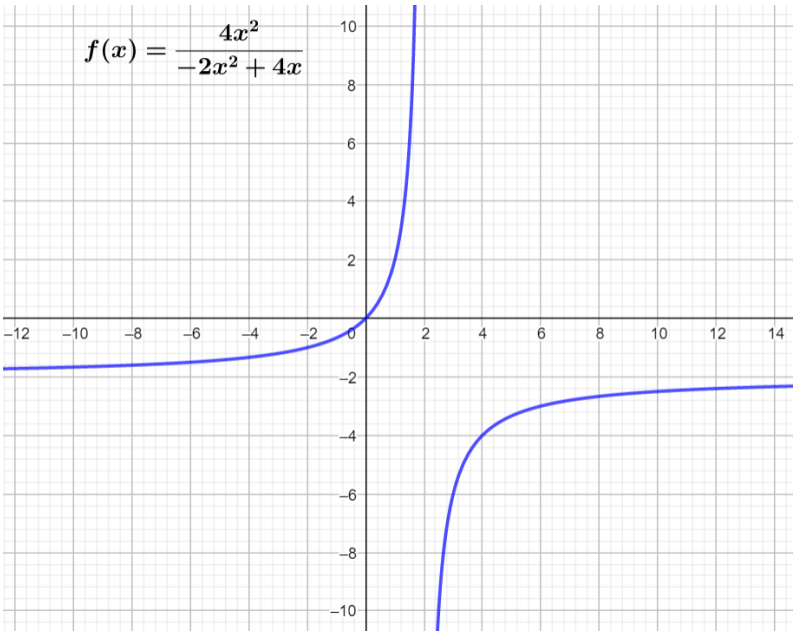
3. $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-x-6}$

4. $f(x) = \dfrac{x+3}{x(x-7)(x+5)}$

5. $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{x^2-x-20}$

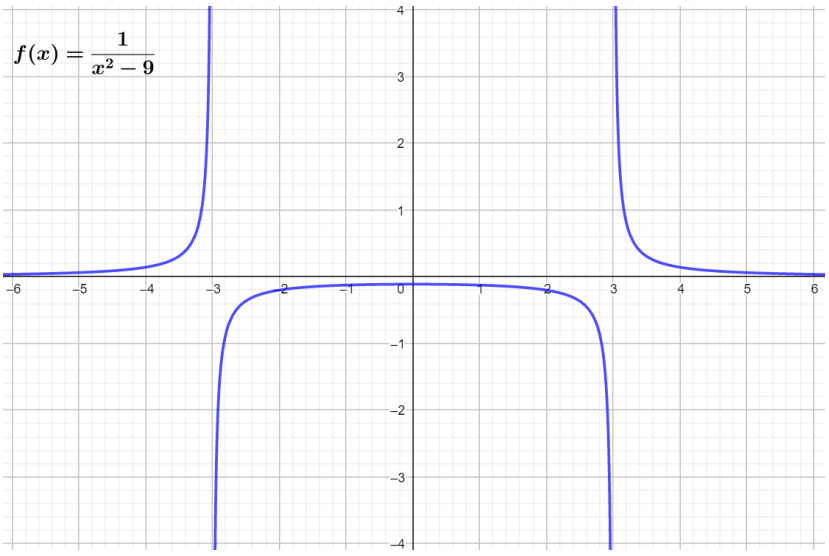
II. TRAZA en cada una de las gráficas las asíntotas horizontales y verticales que existan y escribe la ecuación de cada una de ellas.

1.



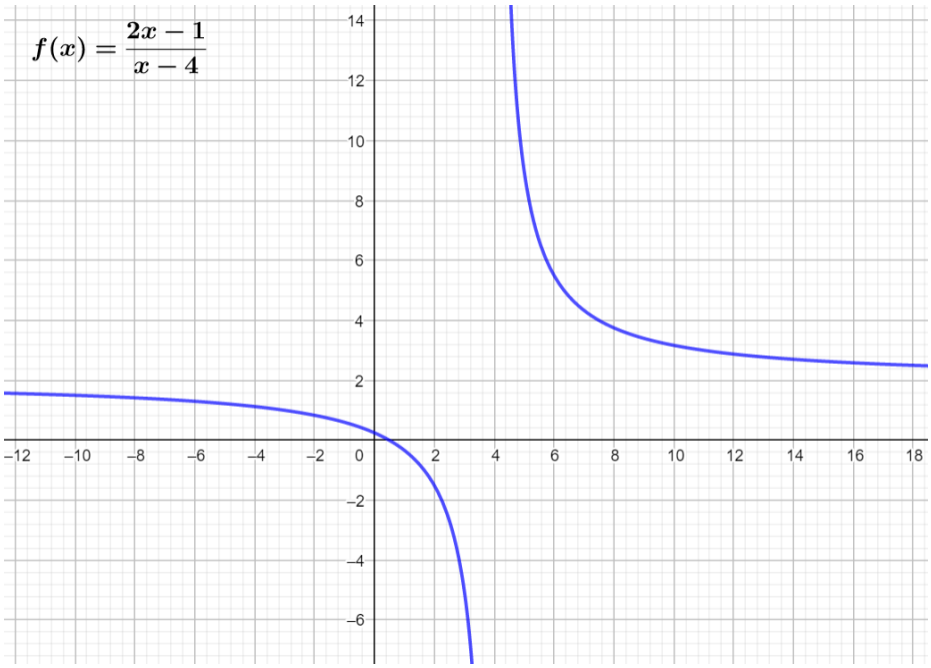
Asíntota horizontal	$y =$
Asíntota vertical	$x =$

2.



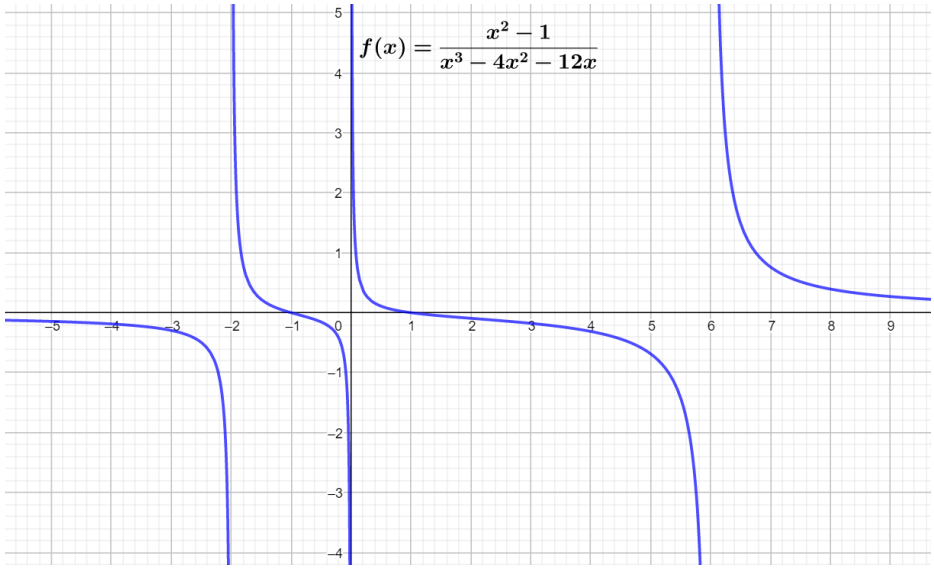
Asíntota horizontal	$y =$
Asíntotas verticales	$x =$ $x =$

3.



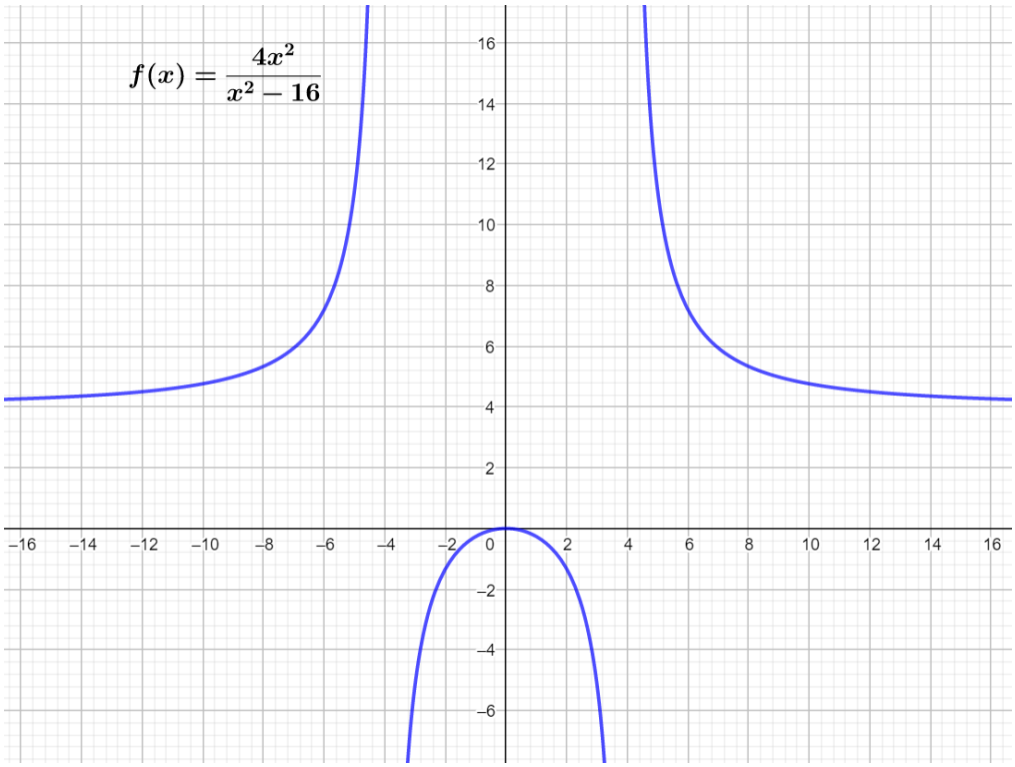
Asíntota horizontal	$y =$
Asíntota vertical	$x =$

4.



Asíntota horizontal	$y =$
Asíntotas verticales	$x =$ $x =$ $x =$

5.



Asíntota horizontal	$y =$
Asíntotas verticales	$x =$ $x =$

Actividad 3. Derivadas algebraicas

Determina las derivadas de las siguientes funciones. Anexa los procedimientos.

1. $f(x) = 3x^5 + 2x^4 - x^3 - 6x^2 + x + 4$

2. $y = 10x^{-2} + 6x^{-3} - 3x^{-1} - 9x + 5$

3. $g(x) = 8\sqrt{x} - \frac{9}{\sqrt[3]{x}}$

4. $y = x^{\frac{2}{3}} + 16\, x^{\frac{1}{4}} - 2x + 4$

5. $f(x) = (x^3 + 3x^2 - 5x)(2x^2 - 2x - 1)$

6. $f(x) = (x^2 - 7x + 4)(3x + 2)$

7. $g(x) = \frac{2x^2+2x}{3x-3}$

8. $f(x) = \frac{-3x^4+5x^2+1}{x^2+5}$

9. $f(x) = 2(4x^2 + 5)^{\frac{5}{2}}$

10. $f(x) = \frac{3}{4}(8x - 1)^{-8}$

COLEGIO DE ESTUDIOS CIENTÍFICOS Y TECNOLÓGICOS
DEL ESTADO DE CAMPECHE
INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
CÁLCULO DIFERENCIAL
ESCALA DE VALORES

NOMBRE DEL ALUMNO:				
CARRERA:				**PARCIAL: SEGUNDO**
CICLO ESCOLAR 2021-2022	**SEMESTRE:**	**GRUPO:**	**APRENDIZAJE ESPERADO:** Encuentra en forma aproximada los máximos y mínimos de una función.	
PRODUCTO ESPERADO:	Actividad 1. Máximos y mínimos de una función			

PLAN DE EVALUACIÓN

NOMBRE	TIPO	MOMENTO	PONDERACIÓN
MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN	SUMATIVA	HETEROEVALUACIÓN	10%

CRITERIOS A EVALUAR	NO CUMPLE	CUMPLE PARCIALMENTE	CUMPLE MAYORMENTE	SÍ CUMPLE	OBSERVACIONES:
	Puntaje asignado				
	0	1	1.5	2	
1. Relaciona correctamente las coordenadas con los máximos y mínimos absolutos y relativos.					
2. Determina correctamente los máximos y mínimos absolutos y relativos en las gráficas dadas.					
3. En el problema de la pecera calcula la función correcta para determinar el volumen.					
4. Realiza la gráfica de la función del volumen e identifica el volumen máximo y la altura de la pecera.					
5. Entrega los productos esperados a tiempo, de forma clara y entendible.					
PUNTAJE OBTENIDO POR NIVEL DE CUMPLIMIENTO:					**CALIFICACIÓN TOTAL:**

NOMBRE Y FIRMA DE QUIEN EVALÚA

COLEGIO DE ESTUDIOS CIENTÍFICOS Y TECNOLÓGICOS
DEL ESTADO DE CAMPECHE
INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
CÁLCULO DIFERENCIAL
ESCALA DE VALORES

NOMBRE DEL ALUMNO:				
CARRERA:				**PARCIAL: SEGUNDO**
CICLO ESCOLAR 2021-2022	**SEMESTRE:**	**GRUPO:**	**APRENDIZAJE ESPERADO:** Utiliza procesos para la derivación y representan a los objetos derivada y derivada sucesiva como medios adecuados para la predicción local.	
PRODUCTO ESPERADO:	Actividad 2. Asíntotas			

PLAN DE EVALUACIÓN

NOMBRE	TIPO	MOMENTO	PONDERACIÓN
ASÍNTOTAS	SUMATIVA	HETEROEVALUACIÓN	30%

CRITERIOS A EVALUAR	NO CUMPLE	CUMPLE PARCIALMENTE	CUMPLE MAYORMENTE	SÍ CUMPLE	OBSERVACIONES:
	Puntaje asignado				
	0	1	1.5	2	
1. Calcula correctamente las ecuaciones de las asíntotas horizontales de las funciones dadas.					
2. Calcula correctamente las ecuaciones de las asíntotas verticales de las funciones dadas.					
3. En las gráficas dadas traza las asíntotas horizontales e indica sus ecuaciones.					
4. En las gráficas dadas traza las asíntotas verticales e indica sus ecuaciones.					
5. Entrega los productos esperados a tiempo, de forma clara y entendible.					
PUNTAJE OBTENIDO POR NIVEL DE CUMPLIMIENTO:					**CALIFICACIÓN TOTAL:**

NOMBRE Y FIRMA DE QUIEN EVALÚA

COLEGIO DE ESTUDIOS CIENTÍFICOS Y TECNOLÓGICOS
DEL ESTADO DE CAMPECHE
INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
CÁLCULO DIFERENCIAL
ESCALA DE VALORES

NOMBRE DEL ALUMNO:			
CARRERA:			**PARCIAL: SEGUNDO**
CICLO ESCOLAR 2021-2022	**SEMESTRE:**	**GRUPO:**	**APRENDIZAJE ESPERADO:** Utiliza procesos para la derivación y representan a los objetos derivada y derivada sucesiva como medios adecuados para la predicción local.
PRODUCTO ESPERADO:	Actividad 3. Ejercicios de derivadas de funciones algebraicas.		

PLAN DE EVALUACIÓN

NOMBRE	TIPO	MOMENTO	PONDERACIÓN
DERIVADAS DE FUNCIONES ALGEBRAICAS	SUMATIVA	HETEROEVALUACIÓN	60%

CRITERIOS A EVALUAR	NO CUMPLE	CUMPLE PARCIALMENTE	CUMPLE MAYORMENTE	SÍ CUMPLE	OBSERVACIONES:
	Puntaje asignado				
	0	1	1.5	2	
1. Calcula correctamente las derivadas suma y resta de funciones.					
2. Calcula correctamente las derivadas del producto de funciones.					
3. Calcula correctamente las derivadas del cociente de funciones.					
4. Calcula correctamente las derivadas de una potencia de la forma $y= u^n$.					
5. Entrega los productos esperados a tiempo, de forma clara y entendible.					
PUNTAJE OBTENIDO POR NIVEL DE CUMPLIMIENTO:					**CALIFICACIÓN TOTAL:**

NOMBRE Y FIRMA DE QUIEN EVALÚA

Libros

Cuéllar, J. (2012). *Matemáticas V*. México: McGraw-Hill.

Gil, J., Díaz, R. (2013). *Cálculo diferencial para cursos con enfoque por competencias*. México: Pearson.

Sánchez, O. (Coord.). (2018). *Cálculo diferencial*. México: KeepReading.

Páginas Web

Becerra, J. (2016). Asíntotas horizontales y verticales de una curva. Disponible en http://www.acervodigital.cab.unam.mx/materiales/mate/dr_becerra/applets/geomanalitica/Applets_Geogebra/asintotas.html

Canal de YouTube Aprendiendo Matemática. Máximos y mínimos de una función. Disponible en https://www.youtube.com/watch?v=Wf5By2eS730

Fernández, J. (s.f). Análisis de funciones. Disponible en https://www.fisicalab.com/apartado/caracteristicas-funciones#monotonia.

Revista educativa CursosOnlineWeb.com. Equipo de redacción profesional. (2019, 03). Máximos y Mínimos de una función. Escrito por: Red educativa. Obtenido en fecha 12, 2021, desde el sitio web: https://cursosonlineweb.com/maximos-y-minimos-de-una-funcion.html.